Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM - Année 2015

Anne-Cécile Mathé, Eric Mounier

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2015

Édités par

Anne-Cécile Mathé et Éric Mounier

PRESENTATION

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de permettre la diffusion régulière de recherches, nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Moment fort de la vie de cette communauté, ce séminaire est traditionnellement organisé deux fois par an les années impaires (aux mois de mars et d'octobre/novembre), dans les locaux de l'université Paris Diderot, avec le soutien de l'IREM de Paris 7 et du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz).

Pour permettre au plus grand nombre l'accès aux présentations de travaux en didactique des mathématiques, les présentations du séminaire, sous réserve d'un accord des intervenants, sont filmées et mises en ligne. L'enregistrement, le montage et la mise en ligne de ces vidéos sont assurés par l'IREM de Paris. Ces vidéos sont accessibles depuis un lien sur la page « manifestations » / « séminaires nationaux » du site de l'ARDM* ou directement sur le site de l'IREM de Paris.

Les actes du séminaire national existent également en version électronique. Vous avez ainsi la possibilité d'accéder de manière plus rapide et plus pratique à une prépublication des textes relatifs aux présentations de chaque séminaire depuis la page « séminaire national » du site de l'ARDM.

Nous remercions Nadine Grapin et Brigitte Grugeon-Allys pour leur aide dans la coordination de la demi-journée consacrée au thème de l'évaluation en didactique des mathématiques, ainsi que Christophe Hache pour son indispensable aide dans l'organisation au sein des locaux de l'université de Paris Diderot.

.

Anne-Cécile Mathé et Éric Mounier

Responsables du séminaire national de l'ARDM

*http://www.ardm.eu/

SOMMAIRE

Séminaire des 13 et 14 Mars 2015 à Paris

PRESENTATION DES TEXTES DE LA REVUE DE QUESTIONS, MARS 2015

ÉVALUATION ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : QUELS DEBATS ? QUELS ENJEUX ? QUELS APPORTS ? UNE APPROCHE PLURIELLE.

Alors que le thème de l'évaluation occupe une place importante dans les débats actuels sur l'école, comment la didactique des mathématiques le prend-elle en compte ? Quelles sont les questions que l'évaluation pose à la didactique et inversement, que la didactique pose à l'évaluation ? Le séminaire a été l'occasion de présenter un panorama historique des différents travaux en didactique des mathématiques (présentation d'Antoine Bodin) permettant d'aborder des questions générales sur l'évaluation, qu'elle soit menée en classe par l'enseignant ou bien qu'elle soit externe (évaluations nationale ou internationale). En mobilisant des travaux récents, les communications montrent comment des outils de la didactique peuvent s'emparer de ces questions, en se centrant sur deux d'entre elles.
1. Comment étudier les validités d'un dispositif d'évaluation ? Dans la continuité des travaux de Bodin, deux présentations portent sur l'étude des validités d'un dispositif d'évaluation. La première (Brigitte Grugeon-Allys & Nadine Grapin) conduit à la mise en place d'une méthodologie d'analyse multidimensionnelle articulant l'analyse *a priori* des tâches, d'une part au niveau global de l'ensemble du test à partir d'une étude épistémologique du savoir évalué, d'autre part au niveau local avec une étude du processus de résolution de chacune des tâches. Ces deux approches épistémo-didactique (Brigitte Grugeon-Allys) et psycho-didactique (Marc Vantourout & Rémi Goasdoué) sont mises en relation avec des caractéristiques psychométriques du test pour l'étude de la validité. La seconde prend en compte de façon complémentaire la notion de compétence et interroge, en lien avec la validité psycho-didactique, l'impact du format QCM sur les processus de réponse engagés par l'élève. Ces deux recherches ont permis de préciser les résultats de l'évaluation nationale CEDRE 2008 et 2014, sur différents domaines (arithmétique des entiers et fractions décimaux en fin d'école, algèbre en fin de collège) et d'interroger la méthodologie de conception d'évaluations à grande échelle.
2. Quelle approche plurielle de l'analyse de pratiques d'évaluation en classe ? Trois aspects sont abordés : l'étude de l'activité de correction de professeurs pour analyser les jugements évaluatifs et accéder aux compétences professionnelles et aux processus d'évaluation qui les fondent (Marc Vantourout & Rémi Goasdoué) ; l'utilisation d'un outil d'évaluation (le diagnostic *Pépite*) et des différentes fonctions de l'évaluation pour réguler l'enseignement au service des besoins d'apprentissage des élèves (Brigitte Grugeon-Allys) ; la place et les fonctions de l'évaluation en classe, et en particulier, la conception et l'analyse des évaluations sommatives à l'école primaire (Nathalie Sayac) et les pratiques d'évaluation des enseignants en collège (Julia Pilet & Julie Horoks).

Hormis la communication d'Antoine Bodin, toutes les autres se situent dans un projet de recherche commun soutenu par l'ANR, le projet Néopraéval (Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'EVALuation et d'enseignement des mathématiques) placé sous la responsabilité de Brigitte Grugeon-Allys : http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

Brigitte Grugeon-Allys et Nadine Grapin

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET EVALUATION : PETITE HISTOIRE DE 40 ANS DE CHEMINS PARALLELES.

À TERME, L'EVALUATION EST-ELLE SOLUBLE DANS LA DIDACTIQUE ?

Antoine **Bodin**

Résumé
Le résumé n'a pas été communiqué par l'auteur.

Mots clés

INTRODUCTION

En complément d'une communication faite au séminaire national de didactique de mars 2015, je suis amené dans le présent texte à reprendre et à compléter mes notes et à essayer de développer ma pensée.
Rétrospectivement, je suis un peu effrayé par le titre que j'ai moi-même donné à mon intervention : ce titre exprime davantage ce qui me semble utile de faire que ce que je suis réellement capable de faire. J'ai de fait été témoin et modestement acteur de ces 40 années de recherches en didactique des mathématiques et de ces 40 années de travaux et d'opérations relatives à l'évaluation, en particulier à l'évaluation des acquis des élèves et il me semble aujourd'hui nécessaire de faire le point des rapports entre évaluation et didactique.
Au début des années 70, il était encore assez facile de faire le tour des recherches en didactique et des travaux sur l'évaluation, mais, en France comme dans nombre d'autres pays, ces deux domaines ont connus depuis un développement quasi exponentiel. À dire vrai, une partie de ces recherches et de ces travaux me sont restés plus ou moins étrangers et il est pour le moins présomptueux de prétendre faire le point.

L'EVALUATION… OU EN EST-ON ?

Avant le début des années 70, le terme évaluation était peu utilisé dans le domaine de l'éducation. Le souci de « mesurer » les acquis des élèves pour « mesurer » l'efficacité des systèmes éducatifs s'était cependant développé aux USA depuis le début du siècle. On parlait là-bas « d'*accountability* », terme que l'on traduit aujourd'hui en français par « redevabilité » : il s'agit de l'idée que les institutions ont des comptes à rendre à leurs mandants. On y utilisait aussi le vocable anglais d'*evaluation* et de nombreuses théories et dispositifs avaient été développés dans ce cadre.
En France, on parlait alors de contrôle, de notation, d'examens lorsqu'il s'agissait de rendre

compte des acquis individuels des élèves. Le souci de « mesurer » et de suivre globalement ces acquisitions (enquêtes à grande échelle) ne s'est imposé qu'à partir des années 70. Ensuite, peu à peu, l'évaluation a envahi l'ensemble des activités humaines et pas seulement le domaine de la formation. Il est dorénavant nécessaire de considérer l'évaluation comme un phénomène social et politique qui conditionne la plupart des aspects de notre vie.
Si l'on se limite à l'enseignement, un basculement s'est peu à peu effectué d'une évaluation largement placée entre les mains des enseignants et donc pilotée par l'amont à une évaluation pilotée par les institutions. Les études internationales comme les études nationales, de plus en plus invasives (ce qui ne préjuge ni de leur intérêt ni de leurs qualités éventuelles) tendent à réduire l'importance de l'enseignant dans le processus évaluatif des acquis des élèves.
Nous avons développé dans un autre article l'idée qu'il y a continuité entre les différents aspects de l'évaluation. De façon plus ou moins consciente, l'enseignant, dans sa pratique quotidienne, directement ou indirectement, est conditionné par les évaluations de masse et par les jugements qu'elles produisent, implicitement ou non, sur son action.
Dans les analyses que l'on peut faire comme dans les études que l'on peut lire sur l'évaluation, il est souvent difficile de séparer les aspects idéologiques et les aspects techniques de la question. Nombre d'essais publiés ces dernières années, tendent à vilipender l'usage qui est fait de l'évaluation ; ses aspects réducteurs et les conditionnements auxquels ils conduisent. La liste serait longue ; voici juste quelques titres récents pour qui mettent dans l'ambiance :

- La tyrannie de l'évaluation.
- L'évaluation, une menace ?
- La folie évaluation.
- Faut-il avoir peur de l'évaluation ?
- La fabrique des imposteurs.

Pour nous limiter à l'éducation, et à côté de ces ouvrages grand public, les articles des sociologues et des psychologues ainsi que ceux produits par les sciences de l'éducation sont nombreux qui dénoncent des effets négatifs de l'évaluation sur la qualité de l'enseignement et sur la motivation des élèves.
Le temps n'est donc plus où l'on pouvait considérer, avec une certaine naïveté, l'évaluation comme un moment de l'activité pédagogique plus ou moins éloigné de l'activité didactique proprement dite et ignorer les interdépendances existant entre les différents actes et dispositifs qui se prévalent de l'évaluation.
Ces réserves faites, nous nous limiterons dans ce texte aux rapports que, de fait, l'évaluation entretient avec l'action didactique et à la place qu'elle occupe ou qu'elle pourrait occuper dans les recherches en didactique des mathématiques.

ÉVALUATION ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Le paragraphe précédent insiste sur le fait que la question de l'évaluation a maintenant envahi le champ de la formation à un point tel qu'il n'est plus possible d'ignorer le rôle de l'évaluation et les effets retour de l'évaluation sur l'acte d'enseigner comme sur le processus d'apprentissage. Dit autrement, le contrat didactique se constitue sous le contrôle et l'emprise de l'évaluation.
Venons-en donc à la didactique ou plus précisément à la recherche sur la didactique des mathématiques.
La recherche en didactique des mathématiques est elle aussi née dans les années 70, c'est à dire en même que l'évaluation commençait à s'imposer dans le système éducatif français.
Les précurseurs de la didactique, en particulier Guy Brousseau ont de suite vu et anticipé les risques que l'évaluation faisait planer sur l'action didactique. Toutefois, Guy Brousseau ne parle essentiellement d'évaluation qu'en référence à une action de type quasi administrative qu'il

convient de tenir à distance sans y prêter grande attention. En ce qui concerne le suivi des processus d'acquisition des élèves, tout était semble-t-il contenu dans la théorie des situations didactiques en particulier avec la dialectique de la validation.
D'une façon générale, la recherche en didactique s'est largement démarquée de la question de l'évaluation qu'elle a largement abandonnée aux psychologues et aux sciences de l'éducation.
Il est symptomatique que, parmi les quelque 400 thèses de didactique des mathématiques répertoriées depuis 1975, 3 seulement contiennent le terme évaluation dans le titre (thèses de Régnier (1983), de Gagatsis (1982) et de Pilet (2012)).
D'autres thèses cependant font, explicitement ou non référence, à l'évaluation. Il en est ainsi de la thèse de Claire Margolinas (1989) qui consacre tout un chapitre sur le sujet et qui en particulier explicite la différence entre validation et évaluation.
Bien que l'étude de l'évaluation ne fasse pas partie du projet de thèse de Claire Margolinas, elle y consacre un chapitre entier dans lequel elle fait une étude détaillée des places respectives de la validation et de l'évaluation dans la classe. Cela à partir d'une définition minimale de l'évaluation qu'elle situe dans la phase de conclusion d'une situation didactique :

> « Une phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel ».

Elle précise encore : *« pour nous, phase de validation et phase de conclusion ne sont pas synonymes* ».
De façon indirecte, beaucoup d'autres travaux sont de nature à intéresser l'évaluation, par les méthodes qu'ils utilisent, par les instruments qu'ils développent, par les questionnaires qu'ils produisent et les analyses qu'ils font des observations faites.
On le sait, l'évaluation est polymorphe. Nous faisons toutefois l'hypothèse que sous ses différentes formes elle influe sur l'activité didactique.

- On sait depuis longtemps que les examens et autres évaluations externes ont une influence directe sur l'action des enseignants et sur la qualité des apprentissages des élèves.
- On sait de même que les pratiques d'évaluation des enseignants au quotidien peuvent motiver les élèves et stimuler les apprentissages, mais qu'elles peuvent tout aussi bien démotiver les élèves et contrarier les apprentissages.
- Dans bien des cas, l'évaluation a pour premier effet de substituer une motivation exogène à la motivation endogène qui préserve davantage le sens des apprentissages.
- Les études de masse, qu'elles soient nationales ou internationales, influent fortement sur les programmes d'enseignement et sur la formation des enseignants. Le fait que, à tort ou à raison, ces études mettent la priorité sur tel ou tel aspect de la formation, génère de façon quasi directe de nouvelles formes d'enseignement et de nouveaux thèmes d'étude. Il en est ainsi de l'insistance de ces études sur les liens à favoriser entre les mathématiques et la vie dite réelle ou sur la place des mathématiques dans la formation du citoyen. Le fait que les études PISA par exemple ne font aucune place à la démonstration est, me semble-t-il, à mettre en relation avec l'effacement progressif de la place de la démonstration dans l'enseignement du collège.

Parmi les formes d'évaluation, une place particulière doit être faite à l'évaluation dite formative qui s'est imposée à partir de 1990 dans les discours sur l'évaluation. En effet, par définition, l'évaluation formative se veut intégrée au quotidien de l'action didactique.
Dans la théorie des situations il n'est pas question d'évaluation dans le cadre du processus didactique proprement dit. La dialectique de la validation ferme le cycle des dialectiques sans mettre en doute que ce qui pouvait être compris avait été compris et ce qui pouvait être appris avait été appris. Cela sans s'opposer à des évaluations de type sommatif (contrôle) effectuées de façon extérieures aux situations didactiques proprement dit.

Provenant de domaines plus ou moins éloignés de la didactique ou même s'opposant à elle, la notion d'évaluation formative est apparue comme superfétatoire pour l'enseignement des mathématiques. Les objectifs et les vertus qu'on lui attribuait étant supposées être assurés par la dialectique de la validation.

Quelques jalons

Revenons un peu en arrière et cherchons à préciser de façon chronologique les premières intrusions des problématiques évaluatives dans les recherches en didactique des mathématiques.
La thèse de Régis Gras (1979) ne porte pas directement sur l'évaluation mais s'appuie sur un travail d'évaluation d'une expérimentation didactique (projet OPC). Bien que Régis Gras précise que ses « *intentions se limitent à expliciter une grille d'appropriation conceptuelle* », sa thèse est le point de départ des travaux sur l'analyse statistique implicative qui offre une alternative encore insuffisamment exploitée à l'approche « mesure » des acquisitions des élèves. La démarche taxonomique qui y est développée permet en effet de hiérarchiser les niveaux d'appropriation du savoir mathématique et permet donc, mieux que l'approche « mesure », de déterminer la valeur des observations faites, et ainsi permet d'évaluer dans le sens premier de ce terme.
La thèse de François Pluvinage (1977) porte directement sur l'évaluation avec sa référence à la classification NLSMA utilisée dans les évaluations internationales de l'IEA, mais surtout, de façon indirecte sur l'éclairage qu'elle porte sur la difficulté des questions posées aux élèves.
En 1977, Guy Brousseau fait un exposé remarqué lors du 29ème congrès de la CIEAM dont le thème était "*Évaluation et enseignement des mathématiques* ». Sa communication : "*l'observation des activités didactiques*" a ensuite été reprise dans sa thèse. Le mot évaluation n'y est prononcé que très marginalement, ce qui est un signe que l'on peut décoder en nous référant en particulier un autre exposé fait par Guy Brousseau à ICME 5 en 1978 : "*Évaluation et théories de l'apprentissage en situations scolaires*". On y lit en particulier :

> « Beaucoup d'enfants et ensuite de professeurs n'acquièrent qu'une fausse pratique du savoir...
>
> L'évaluation seule ne permet pas de corriger les phénomènes rapportés plus haut et parfois elle les accentue.... »
>
> « 1 - L'évaluation permet à certains maîtres de pallier en partie aux insuffisances les plus criantes de son enseignement
>
> 2 - Elle le conduit ensuite à une diversification et à une démultiplication des objectifs intermédiaires, donc à recourir à des situations fermées visant des apprentissages à court terme, avec pour corollaire l'effet de rationalisation.
>
> 3 - Enfin, tôt ou tard l'évaluation se limite à certains objectifs convenus. Les maîtres les visent par des apprentissages d'algorithmes et de savoirs non fonctionnants. L'économie conduit à céder sur les exigences relatives à la compréhension...
>
> Il n'est pas encore possible de distinguer, à l'aide des évaluations classiques, des connaissances acquises par une suite organisée d'assimilations ou même de conditionnement de celles qui sont acquises par une genèse authentique des concepts. »

Ailleurs, à la même époque, Guy Brousseau a bien anticipé, ce qui, au fil des ans, est devenu une réalité de plus en plus préoccupante, à savoir : « *l'écrasement des objectifs sur l'évaluation* ».
Dans les mêmes années, Georges Glaeser introduit l'évaluation dans son cours de didactique des mathématiques. Glaeser (1995) portait en effet un intérêt particulier à l'évaluation et a

suscité plusieurs thèses et autres travaux sur l'évaluation dans le cadre de la didactique des mathématiques.
Son cours porte en partie sur la docimologie et sur l'histoire du côté « mesure » de l'évaluation, mais il s'intéresse aussi à la validité du questionnement et à l'analyse des observations. Cela le conduit à repérer de profils de réponses à un questionnaire et à s'éloigner de la notation traditionnelle par addition de points qui n'ont à l'évidence pas la même valeur.
La relative absence des travaux et des références à l'évaluation dans les travaux de didactique est sans doute due, en grande, partie au fait que la didactique des Mathématiques s'est d'abord développée à partir d'observations relatives à l'école élémentaire. Il est facile de montrer que, au moins à l'époque, les faits d'évaluation ne s'y présentaient pas de façon aussi prégnante que dans l'enseignement secondaire. Il n'est pas certain, s'il n'avait pas déplacé le focus sur les classes de collège et de lycée, que Yves Chevallard ait écrit en 1986 les phrases suivantes :

> « [...] Pourtant lorsque [...] le didacticien tente de pénétrer dans l'histoire d'une classe, il doit se rendre à l'évidence : les faits d'évaluation qu'il peut alors y observer ne sont pas simplement un existant contingent, un mal nécessaire que l'on pourrait ignorer, mais bien l'un des aspects déterminants du processus didactique - qui règle et régule tout à la fois les comportements de l'enseignant comme l'apprentissage des élèves. Bref, quiconque pénètre un peu longuement dans la vie d'une classe ne peut longtemps ignorer la "tyrannie" du processus d'évaluation. » Chevallard et Feldmann (1986).

Ainsi, Chevallard avait bien vu à quel point l'évaluation dans la classe influait sur le processus didactique ; cela sans pour autant ignorer les effets en retour des autres types d'évaluation sur ces processus.
Par la suite Chevallard a en quelque sorte intégré ses réflexions concernant l'évaluation dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) en considérant l'évaluation faite par l'enseignant comme le sixième et dernier moment de l'organisation didactique (Chevallard 1999). Il est souvent revenu ensuite sur la question de l'évaluation (i.e. Chevallard 2004). L'approche théorique qu'il propose oblige à prendre du recul par rapport aux pratiques évaluatives, à mieux en saisir les enjeux et à débusquer les fausses évidences. Cette approche pourrait certainement permettre de mieux problématiser la question de l'évaluation dans le cadre de la didactique.
L'évaluation, que ce soit celle menée par l'enseignant ou celle menée par les institutions plus ou moins spécialisées, se nourrit en effet de fausses évidences. Par exemple, elle croit ou fait comme si elle croyait que les connaissances mathématiques pouvaient être mesurées autrement que dans un sens purement métaphorique. Qui plus est, elle croit ou fait semblant de croire que cette mesure peut être rapportée à une échelle unique.
L'évaluation dite critériée, comme l'évaluation dite par compétence, n'échappe pas à la critique. Ces démarches conduisent en effet souvent à mettre le savoir et l'évaluation en grilles aux mailles de plus en plus fines ; de plus, elle finit le plus souvent par se traduire par être rapportée à une échelle unidimensionnelle.
En utilisant partiellement les catégorisations de la TAD, il y a là une cascade de fausses évidences qui nourrissent la plupart des évaluations :

- Il serait immédiat de faire correspondre une tâche précise à toute case de la grille.
- Cette tâche suffirait pour représenter le type de tâche auquel cette tâche peut être associée.
- De la réussite (vs l'échec) à cette tâche particulière on pourrait déduire la réussite (vs l'échec) à toute tâche du type de tâche associé.
- De la réussite (vs l'échec) à cette tâche particulière on pourrait déduire quelque chose concernant la maitrise de la technique ou de la théorie à laquelle elle est liée.
- Pour l'évaluation, cette tâche aurait la même valeur (le même poids) que toute autre

tâche associée à un autre type de tâche.

Exemple :

- Une case de la grille propose un type de tâche :
  - [Savoir /être capable de] Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs. *« Compétence » du projet de programme cycle 3- 2015) :*
- Une tâche pour l'évaluation qui appartient au type de tâche donné :
  - encadrer la fraction 17/18 par deux nombres entiers.

De la réussite (vs l'échec) à cette tâche particulière que peut-on déduire concernant la maîtrise du type de tâche associé (ici la compétence en question) ?

Supposons que l'élève ait pu utiliser sa calculatrice, et ait observé que $\frac{17}{18}$ = 0,944… et en ait déduit que $\frac{17}{18}$ était compris entre 0 et 1, il aura sans doute fait preuve d'une certaine compétence, mais est-ce bien celle que l'on prétendait observer ?

S'il a, ce qui est sans doute ce que l'on attend de lui, observé sans autre calcul que $\frac{17}{18}$ est positif et inférieur à 1 ($\frac{18}{18}$), a-t-il autant démontré sa maîtrise du type de tâche ?

Que se passerait-il s'il avait eu à traiter la question sans calculatrice avec $\frac{18}{17}$, avec $\frac{259}{72}$, ou plus tard avec $\frac{-259}{72}$ ou $\frac{3,252}{0,27}$?

On pourra objecter qu'il suffirait de poser un nombre suffisamment grand de questions appartenant au même type de tâche, mais ce n'est pas ce que l'on fait, ni ce que l'on peut raisonnablement faire dans les évaluations classiques.

Il ne s'agit donc pas ici de condamner ces évaluations mais seulement d'attirer l'attention sur les interprétations hâtives que sont souvent faites. Il s'agira aussi de montrer comment la recherche en didactique peut aider à améliorer la validité de ces évaluations.

L'EVALUATION DOIT-ELLE INTERESSER LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE ?

Selon une définition proposée par Guy Brousseau, la didactique des mathématiques est la « *Science des conditions spécifiques de l'acquisition provoquée des connaissances mathématiques* ».

Dans ces conditions, si l'on admet que l'évaluation est de nature à perturber ou à conditionner ces acquisitions, il est clair que l'évaluation sous ses différentes formes ne peut manquer d'intéresser la recherche en didactique.

Il en est de même si l'on considère que, dans la plupart des cas, l'évaluation prétend avoir un effet positif sur le fonctionnement du système et sur les apprentissages. Cela, qu'il s'agisse des évaluations conduites par l'enseignant dans sa classe, qu'elles soient présentées comme formatives ou sommatives, ou qu'il s'agisse des évaluations externes. Il suffit par exemple de consulter rapidement les rapports des études PISA pour voir que ces études visent d'abord à améliorer la qualité de l'enseignement. Cela, évidemment, dans un sens favorable aux analyses concernant la nécessité d'adapter les systèmes d'enseignement aux besoins du monde moderne tels que l'OCDE les définit.

Dans tous les cas, l'une des questions qui doit intéresser la didactique est celle de la validité des évaluations.

On souhaite évaluer quelque chose (un objet o !). On met alors en place une évaluation. Qu'est-ce que cette évaluation pourra nous dire sur cet objet ? Quel est son pouvoir de dire quelque chose de vrai sur cet objet (pouvoir véridictionnel !) ? On sait bien que ce pouvoir, au mieux n'est que partiel ; souvent l'évaluation manque tout ou partie de l'objet et peut même tromper l'évaluateur.

L'enseignant qui ne se contente pas de lire un résultat, de compter des points sur une copie, ou de remplir des cases, sait assez bien, selon sa formation, compenser partiellement les défauts d'une évaluation en faisant intervenir son propre jugement. Le jugement professoral est certainement le complément nécessaire de toute évaluation valide et l'antidote de toute évaluation défaillante. La recherche en didactique est de nature à informer et à former un jugement professoral lui-même valide.
En ce qui concerne les évaluations de masse, on sait qu'elles ont hérité de la psychométrie, discipline qui se préoccupe peu de didactique. Certes les méthodes ont évolué et sont de plus en plus sophistiquées (construction d'échelles et utilisation de méthodes probabilistes telle que l'IRT (théorie des réponses aux items)). Ces méthodes, souvent opaques pour le non spécialiste, ne prennent que partiellement en compte la question de la validité. Il y a là, me semble-t-il, un champ de recherche qui mériterait d'être davantage exploité par la recherche en didactique.
Une évaluation peut cependant être valide ou assez valide (rendant bien compte de ce qu'elle prétend observer) et porter sur des objets de peu d'intérêt, du moins pour la formation mathématique. À côté de la validité, et avant elle, se pose alors la question de la pertinence des choix. Sachant à quel point les études de type PISA, ou CEDRE pour la France, ont une influence sur les choix de programmes, cette question de la pertinence, au-delà des analyses de nature idéologique qui sont légitimes mais qui doivent être faites ailleurs, intéresse aussi la cohérence épistémologique des enseignements. De ce point de vue l'étude de la pertinence a évidemment sa place dans les recherches en didactique des mathématiques.
Les résultats des études évaluatives, qu'elles soient nationales ou internationales, sont le plus souvent présentées et analysées directement par ceux-là même qui les produisent, ce qui est bien sûr légitime. Mais ensuite ces résultats et ces analyses sont utilisés tels quels par les divers commentateurs (les médias, mais aussi les politiques et les sociologues qui s'emparent de ces études). Comme si le thermomètre ne pouvait plus être interrogé.
Certes de nombreuses critiques plus ou moins justifiées sont formulées par des chercheurs de tous domaines, mais elles restent le plus souvent confidentielles et, en général sans rapport avec la didactique.
La recherche en didactique des mathématiques aurait certainement beaucoup à gagner à se saisir de ces questions de validité et de pertinence et à les étudier du seul point de vue de leur rapport avec les organisations didactiques.
Des travaux récents et en particulier ceux présentés dans le cadre de ce séminaire par Brigitte Grugeon, Nathalie Sayac et Nadine Grapin montrent que, sur ces questions, des avancées importantes ont été faites ces derniers temps

Des questions que l'évaluation pourrait poser à la didactique

De nombreux travaux de didactique des mathématiques utilisent des instruments d'exploration des comportements des élèves dans une situation donnée, instruments qui ressemblent souvent à s'y méprendre à ceux habituellement utilisés dans l'évaluation scolaire. L'évaluation qui se préoccuperait de validité didactique pourrait demander à la didactique de l'aider dans le choix de ses outils. Il pourrait s'établir, et semble-t-il, il y a déjà ici et là, des collaborations qui pourraient être fructueuses (cf. les communications faites dans le cadre de ce séminaire).
La didactique pourrait en particulier proposer des questions pour l'évaluation, questions qui auraient été analysées d'un point de vue didactique et du point de vue de la validité.
Par analyse didactique d'une question d'évaluation nous entendons :

- L'analyse de la tâche.
- Le repérage de la tâche dans une hiérarchie des niveaux cognitifs telle que celle de Régis Gras.
- La place que le type de tâche correspondant occupe dans l'édifice mathématique

- L'insertion probable ou possible de ce type de tâche dans un processus d'apprentissage.
- L'assurance que cette tâche particulière optimise l'information qui sera recueillie sur le niveau de maîtrise de ce type de tâche.
- Les précautions concernant l'utilisation de cette tâche en situation d'évaluation, de façon à ne pas perturber le processus didactique et, de préférence à l'améliorer (évaluation formative).

L'évaluation est soumise aujourd'hui au défi de l'évaluation des compétences. On peut à bon droit rejeter la notion compétence en qualifiant ce mot de « concept mou », mais l'évaluation pourrait demander à la didactique de l'aider à structurer ce concept comme elle pourrait lui demander de l'aider à rejeter les fausses évidences. Quelle que soit la définition que l'on donne à la notion de compétence, le savoir, l'articulation, et le sens des connaissances ne peuvent être qu'au centre des réflexions sur la question.

Les outils issus de la recherche en didactique tels que les outils d'analyse d'Aline Robert et l'analyse statistique implicative pourraient être mis à profit pour valider ou pour rejeter certaines constructions élaborées pour évaluer des compétences a priori mal définies. Ils pourraient aussi être utilisés pour définir de nouvelles compétences. L'analyse implicative en particulier permet de repérer des proximités cognitives qui ne sont pas évidentes.

L'évaluation pourrait aussi demander à la didactique de lui préciser les points clés des divers apprentissages et donc l'aider à distinguer parmi les savoir-faire (maîtrises de techniques) ceux qui sont des portes ouvertes sur des développements significatifs dans le cours de l'étude et ceux qui n'ont pas d'avenir et sont destinés à l'oubli.

Des questions que la didactique pourrait poser à l'évaluation

La didactique pourrait tout d'abord demander à l'évaluation de démontrer son utilité et son efficacité. L'emprise évaluative sur le système éducatif est devenue trop grande pour que l'exposé des intentions soit suffisant.

Un point qui concerne plus spécialement la didactique est celui de l'évaluation formative. Dans la plupart des pays, elle est devenue le leitmotiv de toute politique éducative. Les intentions sont connues et semblent parfaites : accompagner l'élève dans ses apprentissages et l'aider à apprendre en intervenant lorsqu'il rencontre un obstacle ; cela d'une façon bienveillante, non productrice de stress…

Oublions le stress qui, dans certains cas peut être bénéfique et voyons comment ces intentions sont traduites dans les faits.

D'une part l'évaluation formative (que j'ai largement défendue ailleurs) concerne a priori la relation enseignant-enseigné. Elle n'a pas à nourrir directement l'information de la chaîne qui va de l'enseignant au ministre en passant par le chef d'établissement, les parents, les différents corps de contrôle, etc.…

Ce n'est malheureusement pas toujours le cas, et l'évaluation dite formative est souvent devenue l'alibi pour une évaluation permanente de nature plutôt sommative. Cela vaut pour l'enseignant dans sa classe qui, forcé ou non est amené à pervertir son évaluation formative pour rendre les comptes qui lui sont demandés ; cela vaut aussi pour les évaluations institutionnelles qui, elles aussi, se veulent formatives. La lecture du rapport de l'OCDE sur la question (2005) montre bien comment, dans certain cas l'évaluation formative dans la classe est utilisée de façon indue pour nourrir le processus de contrôle de l'activité des enseignants et des acquisitions des élèves ; cela sans que le rapport y trouve à redire.

Des démarches alternatives sont régulièrement proposées et utilisée pour l'évaluation des élèves. C'était le cas de l'évaluation critériée et maintenant de l'évaluation par compétences ou encore de l'évaluation dite « par contrat de confiance ». La recherche en didactique pourrait se pencher sur ces démarches pour étudier la façon dont elles modifient le contrat didactique et

sur la façon dont elles influent sur la qualité du savoir construit.
Jusqu'à présent, la recherche en didactique n'a pas pris très au sérieux la question de l'évaluation. Elle est pourtant bien placée pour lui poser les questions qui pourraient l'aider à sortir d'un certain simplisme …

SOLUBILITE DE L'EVALUATION DANS LA DIDACTIQUE ?

Nous l'avons dit, évaluation et didactique des mathématiques sont apparues à peu près en même temps dans le paysage. Depuis les années 70 les recherches se sont multipliées et diversifiées, les théorisations se sont consolidées. Évaluation et didactique ont suivi des chemins parallèles, ne se rencontrant qu'à de rares occasions, comme cela fut le cas lors de l'intrusion de l'évaluation formative.
En fin de compte, en dépit d'exceptions que l'on peut souhaiter de plus en plus nombreuses, les enseignants continuent à avoir des pratiques d'évaluation dirigées davantage vers la notation que vers l'analyse de l'activité des élèves, à moins qu'elles ne soient principalement conditionnées par des demandes institutionnelles formelles telles que le remplissage de grilles dont la validité et l'utilité reste à démontrer. Sauf exceptions, la formation des enseignants de mathématiques en matière d'évaluation reste anecdotique ; elle intègre rarement la question des contenus et encore moins la didactique.
De leur côté, les institutions en charge des évaluations de masse ont le plus souvent ignoré non seulement la recherche en didactique, mais aussi les processus didactiques et même… l'enseignement.
D'une façon générale, les questions didactiques ont peu intéressées les spécialistes de l'évaluation, tandis que les chercheurs en didactique des mathématiques se détournaient des questions relatives à l'évaluation.
À un certain moment on aurait pu penser que la théorie didactique avait vocation soit à absorber la didactique soit qu'elle devait la tenir résolument à l'écart. D'où la question de la solubilité de l'évaluation dans la didactique.
Après ce retour en arrière, la question apparaîtra sans doute assez oiseuse. Il est aujourd'hui évident que l'évaluation n'est pas soluble dans la didactique et même que la question est sans intérêt. Le terme recouvre trop de pratiques et trop d'objectifs différents, chacune d'entre elles et chacun d'entre eux étant plus ou moins éloigné des préoccupations de la didactique.
L'écriture de ce texte m'a amené à relire certains textes anciens et à découvrir de nouveaux travaux. Ce faisant j'ai un peu l'impression d'avoir enfoncé ici des portes largement ouvertes. Les travaux de Marc Vantourout et Rémi Goasdoué, par exemple, présentés dans ce séminaire, sont la preuve que certaines de mes interrogations sont aujourd'hui largement dépassées. Il en est de même des autres travaux présentés dans ce séminaire. La question de l'évaluation est bien devenue un sujet qui intéresse la recherche en didactique.
En particulier, Marc Vantourout et Rémi Goasdoué (2014) attaquent résolument la question en articulant des entrées didactiques et psychologiques sur la question. Ils montrent en particulier comment une certaine *« conjonction de travaux en didactique des mathématiques et en psychologie permet de renouveler profondément les débats sur la validité »*.

CONCLUSION

L'évaluation n'est donc pas un concept de la didactique. Toutefois, l'omniprésence des faits d'évaluation (même si ceux-ci ne sont pas homogènes), la demande institutionnelle et sociale, et l'évidente participation d'une partie de ces faits à la genèse et à l'actualisation du contrat didactique et au processus de transposition didactique, rend inévitable une plus grande attention des didacticiens à leur égard.

Après quarante années de chemins plus ou moins parallèles on voit mieux ce que chaque discipline peut demander ou apporter à l'autre. On voit mieux aussi les complémentarités et la nécessité d'une collaboration renforcée de chercheurs d'origines différentes, cela tant d'un point de vue théorique que pour la construction de dispositifs pratiques (évaluations de masse par exemple, mais aussi examens, domaine qui est trop souvent oublié).

L'évaluation et la recherche en évaluation peuvent en effet demander à la didactique des outils lui permettant de mieux assurer la validité de ses entreprises. Elle pourrait accepter ou même demander que la didactique assure un contrôle minimum sur ses entreprises.

La recherche en didactique des mathématiques peut demander à l'évaluation de mieux se poser la question des conséquences de ses actions sur la genèse du contrat didactique et donc sur la qualité des apprentissages.

D'une façon générale la collaboration entre chercheurs et praticiens d'origines différentes est indispensable ; elle se met en place et cela laisse espérer de nouveaux progrès.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (1978) Évaluation et théories de l'apprentissage en situations scolaires. Exposé fait à ICME 5 (Polycopié)

BROUSSEAU, G. (1978) l'observation des activités didactiques. Actes CIEAM 1977 (repris dans sa thèse et dans un article de la *revue Française de Pédagogie* n°45/1978)

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 19/2

CHEVALLARD, Y. (2004) Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation. Site Web - http://yves.chevallard.online.fr/

CHEVALLARD, Y. FELDMANN, S. (1986) Pour une analyse didactique de l'évaluation - Irem d'Aix Marseille

GAGATSIS, A, (1982) *Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques*. Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

GLAESER, G. (1995) : Fondements de l'évaluation en mathématiques. Cours de DEA Publication de l'APMEP N°96.

GRAS, R. (1979) *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions scientifiques et de certains objectifs didactiques en mathématiques*. Thèse, université de Rennes.

MARGOLINAS, C (1989) *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse – Grenoble 1.

MONS, N. (1999) *Les effets théoriques et réels de l'évaluation standardisée*. Eurydice

OCDE (2005) L'évaluation formative. Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires (CERI – Centre de Recherche pour l'Innovation dans l'Enseignement).

PILET, J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse Paris Diderot.

PLUVINAGE, F. (1977) *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques (étude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités*). Thèse de doctorat. Strasbourg.

REGNIER, J. C. (1983) *Auto-évaluation et autocorrection dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique. Entre praxéologie et épistémologie scolaire*. Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg. Repris et complété (1993) sous le titre : De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. La pensée Sauvage

SAYAC, N. GRAPIN, N. (2015) Évaluation externe et didactique et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 35/1.

VANTOUROUT, M. & GOASDOUE, R. (2014) Approches et validités psycho-didactique des évaluations. *Education et Formation* n°302.

REFERENCES NON CITEES DANS LE TEXTE

ARTIGUE, M. & WINSLØW, C (2010) Comparaisons internationales sur l'enseignement des mathématiques : un point de vue porté par la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 31 n°1, pp. 47-82

BODIN, A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique - Questions et méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(1)

BODIN, A. (2007) Dissonances et convergences évaluatives. De l'évaluation dans la classe aux évaluations internationales : quelle cohérence ? *Bulletin de l'APMEP* n° 474 pp 47-79

CANTAT, A. (2009) Historique de l'évaluation des apprentissages : de l'enseignement des jésuites à l'approche par compétences. Université de Laval.

CHEVALLARD, Y. (1989) Evaluation, véridiction, objectivation - la relation didactique comme caprice et miniature. In *L'évaluateur en révolution* - actes du colloque ADMEE 89 – INRP

GUIMARD, P. (2010) *L'évaluation des compétences scolaires*. Presses universitaires de Rennes

RODITI, É. (2012) *Un point de vue didactique sur les questions d'évaluation en éducation.* In : Aline Robert ; Jacqueline Penninckx ; Marie Lattuati. Une caméra au fond de la classe de mathématiques, Presses universitaires de Franche-Comté, pp.275-289, 2012, Pratiques & Techniques

VALIDITÉ D'UNE ÉVALUATION EXTERNE. COMPLÉMENTARITÉ DES APPROCHES DIDACTIQUE ET PSYCHOMÉTRIQUE

Brigitte **GRUGEON-ALLYS**

Université Paris Est-Créteil - ESPE

Laboratoire de didactique André Revuz

brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Nadine **GRAPIN**

Université Paris Est-Créteil - ESPE

Laboratoire de didactique André Revuz

nadine.grapin@u-pec.fr

Résumé

Comment étudier la validité d'un dispositif d'évaluation ? Dans la continuité des travaux de Bodin (1997, 2006), nous présentons une recherche portant sur l'étude des validités d'une évaluation. Cette recherche conduit à mettre en place une méthodologie d'analyse multidimensionnelle articulant l'analyse *a priori* des tâches à différents niveaux de granularité. L'analyse concerne d'une part, au niveau global de l'ensemble du test une étude épistémologique du savoir évalué, d'autre part, au niveau local une étude du processus de résolution de chacune des tâches. Ces deux approches épistémo-didactique (Grugeon 1997) et psycho-didactique (Vantourout & Goasdoué 2014) sont mises en relation avec des caractéristiques psychométriques du test. Nous montrons comment ces deux recherches ont permis de préciser les résultats de l'évaluation nationale CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon) 2008 et 2014, sur deux domaines (numération et arithmétique des entiers en fin d'école, algèbre en fin de collège) et d'interroger la méthodologie de conception d'évaluations à grande échelle.

Mots clés

Évaluation externe ; épistémologie ; validité ; approche anthropologique ; psychométrie ; psycho-didactique.

INTRODUCTION

Nous abordons ici des questions relatives à la validité d'évaluations externes. Nous entendons par « externe », des évaluations à grande échelle (type évaluation nationale ou internationale), ce qui explique que nous prenions en compte des questions psychométriques, leur conception leur accordant une place essentielle. Qu'entend-on par validité d'évaluations ? Une évaluation valide doit évaluer ou mesurer effectivement ce qu'elle est sensée évaluer et rien d'autre (Grégoire et Laveault, 2014). Nous développons une approche multidimensionnelle pour aborder cette question très complexe, à partir de plusieurs champs de recherche, édumétrie, sciences de l'éducation et didactique des mathématiques. Cette approche permet d'utiliser les filtres conceptuels de chaque champ pour découper le phénomène étudié et mobiliser leurs objets d'étude afin d'aborder un phénomène complexe selon différentes entrées.

L'approche didactique permet d'interroger à différents niveaux de granularité des évaluations standardisées sur les acquis des élèves, en mathématiques, conçues essentiellement dans une approche psychométrique. En France, le dispositif CEDRE à la fin de l'école primaire (élèves âgés de 9-10 ans) et à la fin du collège (élèves âgés de 14-15 ans) a pour objectifs d'évaluer les acquis des élèves en mathématiques au regard des programmes scolaires. La conception des items, l'analyse des réponses et l'interprétation des résultats sont menées par des enseignants et inspecteurs et par des statisticiens qui calculent différents indicateurs psychométriques et sélectionnent les items retenus. Le modèle statistique utilisé dans ces évaluations est celui du modèle de réponse à l'item (MRI[1]) (Lescure & Pastor, 2012). La validité de CEDRE repose de ce fait majoritairement sur une approche psychométrique.

Nous interrogeons la validité de CEDRE à partir d'une approche didactique à deux niveaux de granularité : aux niveaux local et global sur la représentativité des items du test et leur couverture du savoir évalué à partir d'une étude épistémologique, et au niveau local sur les processus de résolution de chacune des tâches. Nous précisons ces deux approches épistémo-didactique (Grugeon 1997) et psycho-didactique (Vantourout & Goasdoué 2014) et les illustrons dans deux domaines : l'arithmétique des entiers en fin de CM2 et l'algèbre élémentaire en fin de 3e. Nous mettons en relation les résultats de l'analyse didactique avec des caractéristiques psychométriques du test. En retour, nous interrogeons d'un point de vue didactique les résultats des évaluations en relation avec les praxéologies mathématiques et didactiques des programmes et des pratiques enseignantes. Nous montrons comment cette recherche a permis d'analyser les résultats de l'évaluation nationale CEDRE 2008, 2014, sur les deux domaines, et d'interroger la méthodologie de conception d'évaluations à grande échelle.

DEUX APPROCHES COMPLEMENTAIRES DES VALIDITES D'UNE EVALUATION

CEDRE : UNE EVALUATION STANDARDISEE DES ACQUIS DES ELEVES

Cette évaluation a lieu en fin de CM2 ou de 3e et concerne différentes disciplines, qui sont évaluées avec un cycle de six ans ; les mathématiques ont été ainsi concernées en 2008 et 2014 pour les deux dernières versions. CEDRE a pour finalités d'évaluer les connaissances et les compétences des élèves au regard des programmes scolaires en vigueur en France. Les items appartiennent aux domaines mathématiques des programmes évalués. Le cadre de l'évaluation

[1] « Les MRI sont une classe de modèles probabilistes. Ils modélisent la probabilité qu'un élève donne une certaine réponse à un item, en fonction de paramètres concernant l'élève et l'item [...]. Les MRI ont un intérêt pratique pour la construction de tests [...] : si le modèle est bien spécifié sur un échantillon donné, les paramètres des items – en particulier leurs difficultés – peuvent être considérés comme fixes et applicables à d'autres échantillons dont il sera alors possible de déduire les paramètres relatifs aux élèves – en particulier, leur niveau de compétence. » (Rocher 2015, p. 44)

impose une certaine répartition des items entre ces différents domaines ; les concepteurs doivent donc concevoir des items répondant à cette exigence, tout en veillant à ce que les items soient plus ou moins complexes afin de pouvoir caractériser les connaissances de tous élèves, des plus faibles comme des plus forts. Les questions recouvrent plusieurs formats : QCM, question Vrai/Faux, questions ouvertes à réponse courte, contrainte ou longue (pour la version 2014 en collège). Les QCM sont très majoritaires.
Fondée sur une approche psychométrique et sur le MRI, l'évaluation CEDRE est conçue sur deux ans. Une fois les items conçus par des enseignants experts, un groupe de pilotage s'assure de leur conformité au cadre de l'évaluation et du programme. Une expérimentation du dispositif est réalisée l'année *n*-1 sur un échantillon représentatif d'élèves du niveau scolaire concerné. Seuls les items discriminants[2] sont sélectionnés pour le test final. De plus, les items retenus doivent relever de niveaux de difficulté variés[3]. Ces caractéristiques psychométriques des items, calculées après l'étude statistique des réponses aux items, déterminent les conditions de validité du dispositif d'évaluation (Rocher, 2015). L'étude statistique fournit une échelle de performance en six groupes[4], hiérarchisés selon les connaissances mathématiques qu'ils maîtrisent. Cette échelle est définie *a posteriori* à partir des scores sur l'ensemble des items.

Validité d'une évaluation

Dans la plupart des pays de l'OCDE, l'étude des effets des évaluations standardisées sur les performances des élèves en termes d'efficacité ou d'inégalité scolaire reste faible (Mons, 2009). Et pourtant, le poids accordé aux évaluations standardisées à grande échelle, à l'international ou en France devient de plus en plus important. On peut se demander si ce type d'évaluation externe permet de donner des informations fiables, exploitables sur les acquis des élèves, surtout qu'il s'agit d'une mesure, ici un score. L'élaboration de ces dispositifs d'évaluation s'appuie-t-elle sur une représentativité des tâches au regard du programme pour évaluer les différents aspects des compétences évaluées ? Les items permettent-ils effectivement aux élèves de développer des processus de réponses envisageables et correspondant à ceux visés ?
Ces questions concernent la qualité de l'évaluation qui peut être caractérisée par la pertinence, la validité et la fiabilité du dispositif d'évaluation. La pertinence concerne le caractère plus ou moins approprié de l'épreuve relativement aux objectifs visés, la validité définit le degré d'adéquation entre ce que l'on déclare évaluer et ce que l'on fait réellement, la fiabilité établit le degré de confiance que l'on peut accorder aux résultats observés (De Ketele et Gérard, 2005). Nous centrons notre étude uniquement sur la validité d'une évaluation et distinguons en appui sur cinq types de preuves de validité définies par Grégoire & Laveault (2014, p.165) :

- la validité du contenu pour étudier dans quelle mesure, les items sont représentatifs du domaine évalué,
- la validité des processus de réponse pour décider si les items proposés permettent d'évaluer ce qui est visé et de recueillir les processus de réponse et les démarches d'élèves,
- la validité liée à la structure interne du test pour vérifier l'unidimensionnalité du test

[2] Les items doivent avoir un bon indice de discrimination entre les élèves qui réussissent et ceux qui échouent. Les items peu discriminants (R-bis <0,2) apportent peu d'information et sont écartés après la phase d'expérimentation du test et avant la mise en place de l'évaluation finale.
[3] La difficulté d'un item est déterminée à partir de la proportion d'élèves qui a donné une bonne réponse. Plus la proportion d'élèves ayant réussi est élevée plus l'item est facile.
[4] « Les scores estimés sont alors standardisés de sorte que les élèves de 2007 [pour les sciences physiques] aient une moyenne de 250 et un écart-type de 50. Puis, la distribution des scores est « découpée » en six groupes de la manière suivante : nous déterminons le score-seuil en deçà duquel se situent 15 % des élèves (groupes 0 et 1), nous déterminons le score seuil au-delà duquel se situent 10 % des élèves (groupe 5). Entre ces deux niveaux, l'échelle a été scindée en trois parties d'amplitudes de scores égales correspondant à trois groupes intermédiaires » (Rocher, 2015 p56).

pour évaluer les connaissances et compétences visées.

Approche multidimensionnelle des validités d'une évaluation

Approche psychométrique

La conception de CEDRE à partir d'une approche psychométrique est fortement ancrée sur l'unidimensionnalité du test - chacun des items étant sensé mesurer une seule dimension, que l'on pourrait nommer de façon générale, « la compétence mathématique » - et l'indépendance des items. La validité des résultats de l'évaluation est déterminée à partir deux caractéristiques psychométriques : les niveaux de difficulté des items doivent être variés et les items discriminants. Les items peu discriminants, c'est-à-dire qui apportent peu d'informations sur les acquis des élèves sont donc écartés après la phase d'expérimentation et avant l'évaluation finale. Par ailleurs, lors de la comparaison temporelle des résultats des évaluations 2008 et 2014, des items peuvent aussi présenter un fonctionnement différentiel[5] et être écartés de l'échelle des performances, après la passation de l'évaluation.
D'un point de vue psychométrique, les preuves de validité portent peu sur le contenu effectif des items ; la qualité de ce dernier est prise en compte et interrogée lors de la conception de l'évaluation, mais l'analyse de tâche pour chaque item d'un point de vue mathématique (global et local) n'est pas réalisée de façon systématique à partir d'outils d'analyse - démarches ou erreurs envisageables au vu de l'énoncé et du niveau scolaire. En effet, souvent seul le résultat en termes correct ou incorrect est pris en compte. Aussi, l'étude didactique du contenu mathématique en tant que tel, est de ce fait peu prise en compte dans l'approche psychométrique, comme celle des processus de réponse.

Approche didactique

On comprend bien alors le rôle de l'analyse *a priori* des tâches, à des niveaux local ou global. Ce type d'analyse permet d'éclairer différents aspects de validité didactique pour caractériser la pertinence des items : d'une part, au regard des objectifs d'apprentissage visés et des programmes scolaires, et d'autre part, au regard des processus de réponse potentiels. En premier lieu, il s'agit d'étudier leur représentativité en fonction des programmes évalués - types de tâche, variables didactiques associées et couverture du domaine mathématique concerné : c'est la facette de la validité épistémo-didactique du contenu. La deuxième facette correspond à la validité pyscho-didactique définie par Vantourout et Goasdoué (2014). Ces caractéristiques didactiques peuvent être définies lors de la conception et avant la passation de l'épreuve (*a priori*) et non post passation (*a posteriori* comme c'est le cas pour les caractéristiques psychométriques de l'item qui sont calculées à partir des réponses des élèves). L'approche didactique permet donc d'interroger les choix réalisés au regard de la validité psychométrique. L'analyse *a priori* est bien au centre de l'étude des deux facettes de la validité didactique mais conduit à des exploitations différentes pour l'analyse du test. Nous nous centrons, ici, sur la facette qualifiée d'« épistémo-didactique ».

[5] « Un fonctionnement différentiel d'item (FDI) apparaît entre des groupes d'individus dès lors qu'à niveau égal sur la variable latente mesurée, la probabilité de réussir un item donné n'est pas la même selon le groupe considéré. » (Rocher 2015, p.53)

REGARD THEORIQUE SUR LA VALIDITE EPISTEMO-DIDACTIQUE

L'apport de la théorie anthropologique du didactique (TAD) sur la validité épistémo-didactique

Éléments de la TAD

Dans l'approche épistémologique et didactique, nous nous intéressons d'abord à la représentativité des items d'un point de vue local pour chaque item mais aussi d'un point de vue global sur l'ensemble du test : ce point de vue est un préalable à l'étude de la validité psycho-didactique. Il permet d'étudier si l'item proposé est adapté et en cohérence avec les programmes du niveau auquel il est proposé ou des niveaux précédents. L'étude de la représentativité des items doit se faire au regard des savoirs à enseigner et enseignés : les tâches choisies doivent produire des résultats qui permettent d'analyser de façon opérationnelle les connaissances et les compétences mathématiques des élèves en vue d'une exploitation par l'évaluateur (que ce soit l'enseignant ou l'institution).
Nous avons choisi le cadre de la TAD pour cette analyse. Chevallard (1999) modélise l'activité mathématique en termes de praxéologies mathématiques, c'est-à-dire, de types de tâches et de techniques les résolvant (savoir-faire), une technique étant justifiée par un discours technologique, lui-même étant justifié par une théorie (savoir). Evaluer l'activité mathématique d'un élève sur un domaine mathématique donné, revient à évaluer les praxéologies apprises au regard des praxéologies à enseigner (programmes) à partir d'un échantillon de l'ensemble des types de tâches constitutifs des praxéologies visées (Chevallard 2007, Rey et Feyfant, 2014). Comment construire de tels échantillons ?
Pour un domaine donné de savoir, la définition d'une praxéologie épistémologique de référence à partir d'une étude épistémologique du domaine mathématique (Bosch et Gascon, 2005) vise à décrire et à mettre en relation au cours du processus de transposition didactique à la fois les praxéologies à enseigner, enseignées et apprises. Une praxéologie de référence peut servir de fondement à la sélection d'échantillons de l'ensemble de types de tâches constitutifs des praxéologies visées pour évaluer des praxéologies apprises pour un domaine mathématique, à un niveau scolaire (ici fin CM2 ou fin 3e)[6].

Éléments d'analyse a priori

Nous organisons l'étude de la validité épistémo-didactique à partir d'une analyse praxéologique des tâches. Pour un domaine mathématique donné, nous sommes amenées à croiser la praxéologie à enseigner et la praxéologie épistémologique de référence, ce qui conduit à lister les genres de tâches qui relèvent des praxéologies visées : chaque item relèvera d'un type de tâches. Nous étudions ainsi pour chaque item :

- le type de tâche ;
- la nature du cadre en jeu ;
- les objets mathématiques en jeu et leur nombre. Nous distinguons s'ils sont des données de l'item, des objets à mobiliser pendant la résolution, des résultats ;
- les variables didactiques associées aux objets mathématiques (ou à la situation) en jeu et leurs valeurs compte tenu du niveau scolaire et des enjeux d'évaluation;
- les registres de représentation sémiotiques en jeu, en entrée et en sortie, s'ils sont congruents ou non (Duval, 1996),

[6] La conception de ce type d'évaluation doit aussi prendre en compte les praxéologies à enseigner et enseignées, développées à différents niveaux scolaires, préalablement au niveau scolaire visé.

- le nombre de types de tâches convoqués dans la résolution, et le type de convocation (t ou r convoqués) (Castela, 2008). Le nombre de types de tâches convoqués dans la résolution et les types de convocation définiront la complexité de l'item. La complexité est ainsi liée au fait que l'énoncé contient des indices qui peuvent orienter le résolveur vers la technique à utiliser ou l'identification du type de tâche.[7]

Différents aspects de la validité épistémo-didactique

Nous spécifions les aspects de la validité épistémo-didactique en distinguant la conception des items du test, celle de l'analyse des réponses, de l'interprétation des résultats et de leur exploitation.

- *Conception du test*

Au niveau local

Pour étudier l'adéquation de chaque item au regard des objectifs d'apprentissage visés et des programmes, nous distinguons les items de format QCM, de ceux à question ouverte.
Dans les deux cas, nous analysons le choix des objectifs d'évaluation visés et des codages au regard de l'analyse *a priori*. En croisant praxéologies de référence et à enseigner, nous comparons la technique et technologie attendues et idoines au regard du niveau scolaire et celles potentiellement réalisables selon les valeurs des variables didactiques définissant la tâche. Pour les items de format QCM, nous analysons le choix des distracteurs au regard de l'analyse didactique praxéologique, techniques envisageables ou erreurs récurrentes.

Au niveau global

Nous cherchons si les items recouvrent le domaine évalué et les types de tâches sont absents ou sur représentés en comparant les types de tâches représentés et ceux des programmes via la comparaison avec la praxéologie épistémologique de référence.

- *Analyse des réponses*

Au cours de l'analyse *a priori* nous dépassons le codage des réponses tel qu'il existe dans l'évaluation et le considérons :
- non seulement en termes de réussite ou d'échec ;
- mais aussi en termes d'éléments technologiques et théoriques mobilisés dans les techniques : nous étudions si elles soient idoines ou non, les types d'erreurs associées qui vivent dans le cas de praxéologies apprises non idoines, s'il y a lieu. Les erreurs peuvent être liées à la mobilisation d'une technique en dehors de son domaine de validité. Le croisement entre approches anthropologique et cognitive permet de mettre en relation praxéologies non idoines à un niveau scolaire donné et types d'erreurs.

Nous pouvons ainsi interroger le pourcentage de réussite des items en lien avec les objectifs d'évaluation visés et la mobilisation des techniques envisageables ou visées.

- *Interprétation des résultats et exploitation*

L'analyse didactique permet d'étudier l'impact sur le contenu des choix réalisés pour écarter

[7] L'OM intervient au niveau "t-convoquée" (convoquée par la tâche) lorsque l'énoncé et/ou le contexte contiennent des indices qui orientent directement le résolveur vers la technique à utiliser.

L'OM intervient au niveau "r-convoquée" (convoquée par le résolveur) dans le cas contraire qui peut se produire si l'identification du type de tâches T est à la charge du résolveur ou (non exclusif) si celui-ci doit choisir la technique parmi plusieurs techniques connues pour T.

certains items compte tenu de leurs caractéristiques psychométriques calculées *a posteriori*. Elle permet aussi d'interroger les résultats statistiques, en particulier les échelles de performance, au regard des programmes à enseigner et des pratiques des enseignants, à partir de la comparaison entre praxéologies à enseigner et enseignées et praxéologies épistémologiques de référence associées aux domaines mathématiques en jeu dans les programmes. Cette comparaison permet d'inférer des besoins d'apprentissages ignorés dans les programmes (Castela 2008) ou des pistes de régulation en ce qui concerne les manques praxéologiques mathématiques et l'organisation didactique.
Nous opérationnalisons cette démarche sur deux domaines : celui « d'arithmétique sur les entiers » en fin d'école et celui de l'algèbre en fin de collège.

Deux domaines mathématiques : Numération et arithmétique des entiers (fin de CM2) et Algèbre (fin du collège)

Le domaine de l'arithmétique des entiers (fin d'école)

Le domaine de la numération et de l'arithmétique des entiers est structuré autour de trois praxéologies relatives à la production d'expressions arithmétiques (en situation de résolution de problèmes), à la gestion de la numération décimale et au calcul. Chacune de ces praxéologies est définie par des organisations mathématiques locales caractérisée par des types de tâches, des techniques et des technologies définies à partir de travaux menés sur le domaine (en particulier Fuson et al. 1997, Chambris 2008, Mounier 2010, Tempier 2013). Les types de tâches définis pour le domaine prennent en compte les dimensions outil/objet, les différents registres de représentation du nombre et les modes de calcul possibles : modéliser, convertir pour la production d'expressions arithmétiques, traduire, gérer le nombre sous un aspect ordinal, et cardinal pour la numération et calculer mentalement, de façon posée pour le calcul. Les technologies (de modélisation, de la numération et du calcul) sont définies par l'OM de référence.

Le domaine de l'algèbre (fin du collège)

Nous caractérisons la praxéologie mathématique épistémologique du domaine algébrique à partir d'une synthèse des travaux en didactique de l'algèbre (Chevallard, 1985, 1989b ; Kieran, 2007). Elle est structurée à partir des praxéologies relatives aux expressions algébriques, aux formules et aux équations. Les types de tâches concernent ces différents objets : généraliser, traduire, prouver, reconnaître, calculer - développer, factoriser pour les expressions, modéliser, traduire, reconnaître pour les formules, mettre en équation, traduire, reconnaître, résoudre une équation pour les équations. Ces praxéologies ponctuelles se regroupent en praxéologies locales, praxéologie de calcul et praxéologie d'usage de l'outil algébrique. La praxéologie de référence caractérise les propriétés idoines pour un calcul « intelligent et contrôlé » (prise en compte des aspects procédural et structural des expressions algébriques, de l'équivalence des expressions algébriques, des équations, de la dialectique numérique / algébrique), les discours et modes de raisonnement associés ainsi que les modes de représentation dans les registres de représentation sémiotique du domaine et leur mise en relation.

QUELQUES RESULTATS D'ANALYSE SUR CEDRE

Nous présentons pour chacun des deux domaines des exemples de résultats obtenus après analyse de la validité d'items à un niveau local et à un niveau global en montrant comment cette analyse à deux niveaux s'articule avec la psychométrie.

CEDRE CM2 – Arithmétique des entiers

Au niveau local

Nous retenons deux exemples d'items qui ne sont pas représentatifs du type de tâche mais qui illustrent les questions de validité que nous avons soulevées précédemment et la façon dont l'analyse didactique permet de les appréhender.

Le premier item (Figure 1) représente un type de tâche de traduction ; il est formulé sous la forme d'une succession de trois vrai-faux, pour lesquels un seuil de nombre de bonnes réponses est fixé à trois sur trois) pour déclarer l'item réussi :

Indiquer vrai ou faux pour chaque ligne :		
5 751 = 5 000 + 700 + 50 + 1	□ Vrai	□ Faux
9 054 = 9 000 + 500 + 4	□ Vrai	□ Faux
27 303 = 20 000 + 7 000 + 300 + 3	□ Vrai	□ Faux
		Extrait de CEDRE 2008

Figure 1 : tâche de traduction

Dans cet item, les trois décompositions des nombres sont des décompositions additives réduites (lorsque les égalités sont vraies). Les trois questions de cet item relèvent d'un type de tâche de traduction canonique et par conséquent peuvent être résolues avec une technique qui ne met pas en jeu de technologies reposant sur l'aspect décimal du nombre. Il est pertinent dans les successions de Vrai-Faux, d'avoir des questions similaires qui conduisent à évaluer le même savoir et qui mobilisent la même technique et les mêmes éléments technologiques, afin que le regroupement des questions pour déterminer un seuil ait un sens. Il n'aurait pas été pertinent de proposer, dans ce même item, une égalité comme « 5 751 = 5 200 + 500 + 51 » qui ne peut pas être validée avec cette même technique. En revanche, si à l'intérieur d'un même item il est pertinent de ne pas proposer des tâches qui relèvent de types de tâches différents, il est complémentaire d'avoir des items similaires formulés dans un autre registre d'écriture (EUN ou EPD[8]) et/ou de façon non canonique pour repérer les compétences d'un élève à reconnaître différentes décompositions d'un nombre.

Nous avons aussi repéré des items moins usuels pour lesquels nous avons dû formuler un objectif d'évaluation, comme par exemple celui ci-dessous (figure 2) :

Marc effectue des opérations. Pour chaque opération, quel chiffre des unités obtient-il ?				
1891 × 9	455 × 25	2077 × 57	400 × 12	919 × 6
Item posé sous une forme ouverte contenant les 5 opérations - Extrait de CEDRE 2008				

Figure 2 : tâche de calcul réfléchi

Des tâches semblables sont proposées avec l'addition et avec la soustraction ; nous les avons considérées comme relevant du calcul réfléchi (même s'il ne s'agit pas de donner le résultat) puisque la technique qui permet le plus efficacement de donner la réponse consiste à appliquer mentalement la technique de calcul posé pour retrouver que le chiffre des unités du produit est le chiffre du produit des unités des deux nombres. De telles tâches permettent de repérer aussi la maîtrise des répertoires multiplicatif ou soustractif en lien avec la connaissance des unités

[8] EUN : écriture en unités de numération ; EPD : Écriture selon les puissances de 10.

d'ordre 0 dans un exercice de calcul réfléchi.
Au niveau de l'échelle des scores, nous interrogeons le choix de cet item pour caractériser le groupe 3 : en effet, l'item identique posé avec des soustractions caractérise le groupe 4, alors qu'en calcul posé comme en calcul réfléchi, les soustractions sont mieux réussies que les multiplications. Plus généralement, nous avons pu observer que lorsqu'item ne se révélait pas ou peu pertinent localement d'un point de vue didactique, sa position dans l'échelle n'était pas cohérente avec celle des autres items qui représentent le même type de tâches.

Au niveau global

Après avoir analysé chacun des items du domaine pour les deux évaluations 2008 et 2014, nous observons que différents critères assurant la validité du contenu ne sont pas complètement respectés ; en particulier en 2008 :
- des types de tâches manquants pour la praxéologie de numération et un certain déséquilibre dans la répartition de ceux existants qui remettent en cause la représentativité des tâches sélectionnées : en particulier pas de types de tâches de conversion (Tempier, 2013), pas de types de tâches mettant en jeu l'aspect cardinal du nombre, alors que certains types de tâches sont surreprésentés (comme celui de « compléter une suite numérique de raison 10, 100... en avançant ou en reculant » qui est représenté par 17 tâches sur 44 en numération),
- les items proposés ne permettent pas souvent de voir une progressivité sur les techniques et les technologies,
- les praxéologies sont convoquées principalement à un niveau technique, et rarement à un niveau supérieur,
- les formats de question ne sont pas toujours adaptés à la tâche, en particulier pour le calcul réfléchi. Ce que nous avons montré localement dans le paragraphe précédent.

Évolution entre 2008 et 2014

Si de nouveaux items apparus en 2014 ont permis de combler certaines absences dans les types de tâches, d'autres se sont créés (disparition de types de tâches de comparaison ou de traduction entre écriture en unités de numération et écriture chiffrée) maintenant une répartition déséquilibrée. Nous observons néanmoins que les tâches où il s'agit de « compléter une suite numérique de raison 10, 100... en avançant ou en reculant » ne sont plus autant présentes en 2014 qu'en 2008 (4 sur 21 au lieu de 17 sur 44) amenant un meilleur équilibre, qui mériterait cependant d'évoluer encore pour qu'au moins une tâche relevant de chacun des genres de tâches soit proposée.

Il serait néanmoins hâtif de remettre en cause la validité du contenu des évaluations CEDRE 2008 et 2014 à partir de ces constats ; en effet, nous nous limitons ici à une étude sur les entiers et il serait judicieux et complémentaire de la mettre en perspective d'une étude similaire sur les nombres décimaux ; en effet, si certains types de tâches (de comparaison, de traduction, de calcul...) sont peu représentés avec des nombres entiers, ils peuvent l'être avec des nombres décimaux et donc rééquilibré le contenu de l'évaluation. Par contre, la méthodologie que nous avons développée est performante pour permettre aux concepteurs de d'équilibrer le contenu dès la conception (si elle est utilisée en amont) puis de l'adapter (si elle est utilisée en aval).

CEDRE 3e – Calcul littéral

Nous opérationnalisons l'analyse dans le domaine du calcul littéral sur certains items illustrant les questions abordées.

Au niveau local

Les items sont-ils pertinents pour évaluer des objectifs d'apprentissage visés au regard des programmes ? Nous l'étudions pour deux types d'items : à énoncé ouvert et de format QCM.

Problème à énoncé ouvert

En 2008, Chantal fête ses 53 ans et sa fille Sophie ses 24 ans. En quelle année, l'âge de Chantal sera-t-il le double de celui de sa fille Sophie ?

Figure 3

Cet item (figure 3) vise à étudier la compétence d'un élève à mettre en équation un problème du premier degré puis à le résoudre via une équation à une inconnue. Trois techniques possibles de résolution sont envisageables : une technique par essai, en calculant les âges de Chantal et de Sophie au cours des cinq années suivantes ou une technique à partir d'un schéma et d'un calcul arithmétique (technologie arithmétique), et enfin une technique algébrique de mise en équation et de résolution d'équation, l'inconnue x représentant le nombre d'années et l'équation à résoudre étant $53 + x = 2(24 + x)$ (technologie algébrique). L'équation du premier degré ayant des coefficients entiers et une solution entière, la résolution de cet item ne nécessite pas la mobilisation d'une technologie algébrique. Les deux autres démarches sont de fait beaucoup plus faciles.
25 % des élèves n'ont pas répondu et 31 % des réponses sont correctes. Or, le calcul du pourcentage de réussite prend en compte le résultat du problème et non la technique. Les 31 % de réussite recouvrent donc les techniques algébriques et non algébriques, ce qui est en contradiction avec l'objectif d'évaluation visé par l'item. Cet item n'est donc pas adapté pour l'objectif d'évaluation visé et aucun item de CÈDRE 2008 ne permet de tester à quel groupe de l'échelle est associée la capacité « mettre en équation ». En 2014, le type de tâche mettre en équation n'est toujours pas évalué, mais des problèmes analogues au problème précédent ont changé d'objectif d'évaluation. Ils visent à évaluer la capacité des élèves à mobiliser une technique pour résoudre ce type de problème du premier degré « arithmétique » qui peut être résolu par plusieurs techniques.

Item de format QCM

Considérons les deux items de format QCM de CEDRE 2008 et 2014 (figures 4 et 5) proposés ci-dessous.

Quelle est la forme développée et réduite de $(2x+3)(x-2)$?

Cocher la bonne réponse.

1 ☐ $2x^2+3x-2$

2 ☐ $2x^2-x-6$

3 ☐ $2x^2+3x-5$

4 ☐ $2x^2-x-2$

Taux de réussite : 73,5%

Figure 4 : Développer une expression

On donne l'expression $A = 1+2x$

Cocher la valeur de A pour $x = 7$

1	☐	15
2	☐	21
3	☐	28
4	☐	37

Taux de réussite : 84,7%

Figure 5 : Calculer une expression

Comment ont été choisis les distracteurs ? Quel est leur impact possible sur le processus de réponse de l'élève ?
Le premier item est un QCM à choix multiple portant sur le développement d'une expression

algébrique via la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction. 73% des réponses proposées sont correctes. Les distracteurs sont des polynômes du second degré choisis parmi un panel de polynômes du second degré de formes proches, correct ou erronés, après l'usage de cette propriété. Une analyse didactique met en évidence d'autres distracteurs, des polynômes correspondant à plusieurs techniques erronées, les technologies impliquées et les contrôles mis en jeu laissant vivre différents types d'erreurs récurrentes, par exemple, un polynôme du second degré pour une application erronée de la distributivité, 3x+1 pour une reconnaissance erronée de la structure de l'expression ou bien, 10 x 2 pour la forme réduite obtenue suite à une confusion entre processus et structure dans une technologie arithmétique.
Le choix des distracteurs pour le premier item ne permet pas d'interpréter son pourcentage 73,5% de réussite, étant donné que les distracteurs mobilisés ne prennent en compte que des usages erronés de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et non d'autres démarches envisageables.
L'attribution des distracteurs pour l'item 2 s'appuie sur une analyse didactique : 21 pour l'interprétation incorrecte de la priorité opératoire en jeu dans l'expression numérique $(1+2)\times x$, 28 pour l'interprétation incorrecte de $2x$ comme une écriture chiffrée en base 10, 37 pour la conjonction des deux interprétations incorrectes précédentes.

Au niveau global

Au-delà de la pertinence de chaque item, nous interrogeons la représentativité des items et leur couverture du domaine algébrique. Pour CEDRE 2008, nous constatons l'absence de types de tâches *outil* - *« produire une expression littérale »*, *« prouver une propriété »*, *« mettre en équation un problème du premier degré »* – et un déséquilibre entre les types de tâches *outil* (6) et ceux de *calcul* (24), à l'avantage de ceux de calcul comme *« substituer »* ou *« tester »*, *« calculer »*, *« reconnaître la structure »*, *« développer »* ou *« factoriser »*. Les items concernant la mise en équation ne sont pas présents dans l'un des six groupes les plus hauts de l'échelle construite dans CEDRE 2008 *a posteriori*.

Évolution entre 2008 et 2014
On constate une évolution entre 2008 et 2014. Les types de tâche « résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues » (groupe 5), « traduire une situation par une expression algébrique » (hors échelle) étaient évalués en 2008 et ne le sont plus en 2014. Mais, des types de tâches pré algébriques, comme « calculer un programme de calcul » (4), ou « remonter un programme de calcul » (4), apparaissent dans CÈDRE 2014, en particulier, pour le premier type afin de remplir l'échelle de compétences pour les groupes de bas niveau. Il en est de même pour « associer une expression générale à un programme de calcul d'un pattern », mais c'est une tâche très complexe, lié au décalage du numéro d'indice avec le numéro de l'étape du pattern. Il y a plus de types de tâches outil (11) en 2014, leur nombre restant inférieur à ceux de calcul (29), mais leur poids reste identique le nombre total de tâches augmentant.
De plus, la complexité des items est faible, les items visant principalement une application assez rapide de technique, sans laisser aux élèves beaucoup d'initiative. Dans aucun des items, les élèves n'ont à leur charge de mobiliser une lettre pour généraliser, modéliser ou mettre en équation.
D'un point de vue didactique, nous interrogeons donc l'échantillon des items retenus : ils ne sont pas complètement représentatifs du domaine algébrique, ici le domaine algébrique, tant en ce qui concerne les praxéologies d'usage de l'outil algébrique que la complexité des types de tâches.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous poursuivons la recherche engagée dans le cadre du projet ANR Néopraéval (2014-2017) et en particulier, l'analyse de l'évaluation CEDRE. L'articulation entre les preuves de validité psychométrique et didactique a déjà montré son opérationnalité et la complémentarité des deux approches sur les deux domaines.
Comme nous l'avons montré, l'approche didactique fournit en amont de la conception des outils de description et d'analyse praxéologique *a priori* des tâches pour déterminer la pertinence et la représentativité d'une tâche, la couverture du domaine mathématique. Nous avons déjà montré les évolutions entre CEDRE 2008 et 2014. Elle permet aussi d'analyser des items écartés de l'évaluation pour des raisons psychométriques, en particulier les items peu discriminants avec un R-bis inférieur à 0,20, de mettre en relation l'indice de difficulté d'item avec des descripteurs de tâche (congruence ou non des représentations sémiotiques, niveaux de complexité, format de la question, …) et de questionner des « incohérences » dans le niveau de difficulté d'un item en termes psycho-didactique. Dans le cadre de la comparaison temporelle entre deux évaluations CEDRE, il s'agit d'interpréter le fonctionnement différentiel d'items à partir de l'évolution éventuelle des praxéologies à enseigner.
En retour, l'analyse didactique permet d'interroger des résultats statistiques : quelles sont les origines de pourcentages de réussite faibles sur certains types de tâche ? Des technologies implicites dans les programmes ? Des pratiques d'enseignants à faire évoluer ?
Les évaluations CEDRE, comme les autres évaluations nationales et internationales, évoluent vers des passations sur support numériques, et se développent aussi avec des volets adaptatifs (par exemple pour le calcul mental). L'approche épistémologique et didactique donne aussi des outils pour développer des évaluations sur support numérique, comme l'a déjà montré la recherche autour de logiciel d'évaluation diagnostique *Pépite* (Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot et Delozanne, 2012). Le fondement sur un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique permet un codage qualitatif s'appuyant sur différentes dimensions liées à la caractérisation de la praxéologie épistémologique de référence en praxéologies locales agrégées. Cette approche permettrait d'interpréter les groupes des échelles de performance (géographie de la classe à partir de profils d'élèves) et de proposer des pistes de régulation adaptées aux besoins d'apprentissage repérés des élèves (Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot et Delozanne, 2012). Nous poursuivons ainsi les recherches en ce qui concerne les évaluations adaptatives.

Pour conclure, nous cherchons à déterminer des conditions pour "renforcer" les preuves de validité des dispositifs d'évaluation externe : une méthodologie de conception basée sur une analyse multidimensionnelle et la complémentarité des approches didactique et psychométrique, au cours des différentes étapes de la conception, en est une, tant en ce qui concerne le contenu (validité épistémo-didactique) que les processus de réponses (validité psycho-didactique). Nous visons ainsi un enrichissement des évaluations au service des apprentissages et de la formation. Cette méthodologie permet un double éclairage sur les programmes et les pratiques enseignantes, d'une part, pour comprendre les résultats des évaluations et leur évolution et, d'autre part, pour questionner leur impact sur les apprentissages à partir de l'exploitation des résultats des évaluations. Pour ceci, nous continuons à mettre en perspective les praxéologies à enseigner, enseignées et apprises, l'échantillon des types de tâches de l'évaluation via la caractérisation d'une praxéologie épistémologique de référence relativement aux domaines mathématiques en jeu.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BODIN A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1) 49– 96.

BODIN A. (2006). Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. *Repères IREM,* 65, 55-89.

BOSCH M., GASCON J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans Mercier A. & Margolinas C. (Dir) Balises pour la didactique des mathématiques (197 – 122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2) 135–182.

CHAMBRIS C. (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot - Paris 7.

CHEVALLARD Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique *Petit x* 5 51–94.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43–75.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2) 221 – 266.

CHEVALLARD Y. (2007) Une épreuve expérimentale de mathématiques ? http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Une_epreuve_experimentale_de_mathematiques.pdf

DE KETELE, J.-M. & GERARD, F.-M. (2005). La validation des épreuves d'évaluation selon l'approche par les compétences, *Mesure et évaluation en éducation*. 28.3, 1-26.

DUVAL R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3) 349–380.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J. C., MURRAY, H. G., HUMAN, P. G., OLIVIER, A. I., FENNEMA, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.

GREGOIRE J., LAVEAULT D. (2014) *Introduction aux théories des tests en sciences humaines*. De Boeck : Bruxelles.

GRUGEON B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques* 17 (2) 167–210.

GRUGEON-ALLYS B., PILET J., CHENEVOTOT-QUENTIN F., DELOZANNE E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives Hors-série 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

LESCURE S., PASTOR J-M. (2012) *Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences.* Paris : Scéren.

MOUNIER E. (2010) Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot - Paris 7.

PILET J. (2012) Parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

REY O., FEYFANT A. (2014) Évaluer pour (mieux) faire apprendre. Dossier de veille de l'Ifé, 94.

ROCHER T. (2015) Mesure des compétences. Méthodes psychométriques utilisées dans le cadre des évaluations des élèves. *Éducation et Formations* 86/87 37–60.

TEMPIER F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

VANTOUROUT M., GOASDOUE R. (2014) Approches et validités psycho-didactique des évaluations. Éducation et Formation N°e-302. http://ute3.umh.ac.be/revues/

ÉVALUATIONS ET JUGEMENTS DES ENSEIGNANTS

Marc **VANTOUROUT**
Université Paris Descartes
marc.vantourout@parisdescartes.fr
Rémi **GOASDOUÉ**
Université Paris Descartes
remi.goasdoue@parisdescartes.fr

Résumé
Sous l'impulsion des travaux pionniers des docimologues, l'étude des pratiques d'évaluation a durablement tourné autour de la question des divergences entre évaluateurs tout en négligeant l'effet des spécificités des contenus en jeu dans les évaluations. L'enjeu principal de l'approche, que nous qualifions de psycho-didactique des évaluations est précisément de combiner l'apport des didactiques disciplinaires et des travaux en psychologie sur l'analyse de l'activité pour mieux comprendre les activités d'évaluations et remettre au centre des préoccupations la question de la validité. Nous présentons des travaux en mathématiques et en sciences économiques et sociales (aspects méthodologiques et résultats) qui montrent l'intérêt de ces approches pour étudier l'activité de correction ou d'évaluation proprement dite.

Mots clés
Évaluation, jugement des enseignants, didactique, analyse de l'activité, situations aménagées

QUELQUES REPERES

Préambule : travaux relatifs à l'évaluation au sein de l'équipe EDA[1]

Au sein de l'équipe EDA, depuis plus de quinze ans, des recherches portent sur l'activité des évaluateurs, avec la volonté d'articuler évaluation et didactique de la discipline impliquée. Plusieurs thèses ont été soutenues, principalement sous la direction de Sylvette Maury (Vantourout, 2004 ; Nabbout, 2006), d'autres vont l'être prochainement (Smith, 2015 ; Blanc, 2016). La thématique de l'évaluation permet actuellement de caractériser cette équipe où nous sommes de plus en plus nombreux à nous intéresser à ce domaine (cf., par exemple, Roditi & Salles, 2015). Les premiers travaux, consacrés aux mathématiques, ont permis développer un regard didactique sur les questions liées à l'évaluation des élèves et de leurs apprentissages. Puis, nous avons travaillé sur les sciences économiques et sociales, épaulés par des spécialistes

[1] Le laboratoire EDA (EA 4071) – Éducation, Discours, Apprentissages – est une unité de recherche pluridisciplinaire de la Faculté des Sciences Humaines et Sociales-Sorbonne de l'Université Paris Descartes.

de ce domaine (Goasdoué, Vantourout & Bedoin, 2015, à paraître). Enfin, depuis maintenant cinq ans, plusieurs d'entre nous s'intéressent à l'évaluation en lecture et en compréhension de texte (Blanc, Goasdoué, Smith, Vantourout & Maury).

Au sein de l'activité des évaluateurs, nous distinguons plusieurs facettes : la conception d'épreuves et leur « correction », ainsi que la facette « communication » avec des travaux prenant en compte les livrets des élèves en primaire. Ce texte, comme notre intervention lors du séminaire national, portera sur l'activité de correction ou d'évaluation proprement dite.

Correction-évaluation et docimologie(s)

D'un point de vue historique, c'est dans le cadre de la docimologie puis de la docimologie expérimentale (cf., respectivement, Piéron, 1963, et Noizet & Caverni, 1978) que les premiers travaux consacrés aux examens et à l'évaluation des élèves ont été réalisés. Toutefois, dans ces perspectives, on ne s'est jamais véritablement intéressé à l'activité des correcteurs, mais uniquement à la note produite. Rappelons brièvement que, dans la première moitié du 20^{e} siècle, les docimologues ont fait le constat des divergences et écarts de notes entre correcteurs, puis que, entre 1960 et la fin des années 70, les docimologues expérimentaux ont montré l'existence de biais systématiques lors de la notation d'un lot de copies (effets d'ordre, de contraste et d'assimilation). La question traitée relève alors de la fidélité. L'importance accordée à celle-ci, aux dépens de la validité, a fait l'objet de critiques fondées, dont celles de Cardinet dès 1973 et de Bodin en 2006. Nous rejoignons ces auteurs et estimons que l'étude renouvelée de la validité, c'est-à-dire sous un angle didactique, peut constituer l'un des apports majeurs des didactiques disciplinaires au domaine de l'évaluation, cette étude pouvant concerner les épreuves (voir la contribution de Grugeon & Grapin dans ce séminaire ; Vantourout & Goasdoué, 2014) et les jugements (Goasdoué, Vantourout & Bedoin, 2015 à paraître). En quelque sorte, nos travaux prolongent ceux des docimologues expérimentaux tout en les renouvelant. En effet, contrairement à nos prédécesseurs, grâce aux apports des didactiques disciplinaires et de la psychologie des apprentissages, nous nous intéressons au fonctionnement cognitif des évaluateurs, aux processus de construction des jugements et prenons en compte les spécificités des contenus en jeu dans les évaluations. Cette prise en compte de ces organisateurs de l'activité d'évaluation nous a permis de montrer notamment que les divergences de notations ne recouvrent pas les divergences de jugements (voir infra).

REMISE EN CAUSE DU MODELE « REFERENT/REFERE »

Le modèle « référent/référé »

Les travaux en docimologie expérimentale ont abouti à la proposition d'un modèle explicatif (cf. Annexe 1) où les auteurs font figurer deux opérations cognitives qui caractérisent l'essentiel des comportements d'évaluation de productions scolaires : « l'opération de sélection des produits attendus parmi les produits possibles et l'opération de comparaison de la copie – produit réel – et du modèle de référence » (Noizet & Caverni, 1978, p. 116). En accord avec ce modèle, l'évaluation, d'un point de vue psychologique, est conçue et définie comme « une comparaison entre un référent et un référé » (cf. par exemple, Barbier, 1985 ; Hadji, 1992, 1997). Toute évaluation suppose donc la construction par l'évaluateur d'un référent, système d'attentes jugées légitimes (ou d'un ensemble des critères au nom desquels on va se prononcer), et d'un référé, « modèle réduit » de l'objet évalué, c'est-à-dire ce à partir de quoi on pourra porter le jugement de valeur (cf. Hadji, 1997, p. 42-45 : 1992, p. 31-36). Pour Amigues et les docimologues expérimentaux (1975), la tâche d'évaluation ne peut être exécutée sans que l'évaluateur ne dispose d'un modèle de référence, inscrit dans ses structures cognitives. C'est ce modèle « comparaison référent/référé » que retiennent très majoritairement les spécialistes de l'évaluation pour appréhender l'activité des évaluateurs. Élaboré à partir de tâches de corrections de lots de copies, il est convoqué indépendamment de formes d'évaluation et est en quelque sorte considéré comme universel.

Résultat d'une recherche

L'un des termes de cette comparaison, le référent (ou modèle de référence), principalement ses caractéristiques et sa construction a priori, ont été remis en cause : il a été montré que certains professeurs élaborent leur référent alors qu'ils évaluent et que ce dernier peut renfermer des réponses et solutions erronées (Vantourout, 2004 et 2007). Il est possible de faire un rapprochement entre ce phénomène évaluatif et l'évaluation « appréciative sans modèle prédéterminé » postulée par Ardoino et Berger (1986, cf. Hadji, 1989 et 1992), démarche dans laquelle le référent n'a pas été construit avant toute prise d'information : « Évaluer c'est se poser la question du sens de ce qui se fait (…). C'est interpréter, c'est-à-dire construire au cours de l'opération d'évaluation, un 'référant', qui loin d'être un préalable à l'identification du référé, est le produit de l'activité d'évaluation » (Hadji, 1992, pp. 37-38). Nos recherches ont permis de donner une consistance empirique à ces propositions et d'attester l'existence de tels phénomènes évaluatifs et de constater que, parmi les évaluateurs qui ne disposent pas de référent a priori, figurent ceux qui maîtrisent mal, voire pas du tout, les aspects disciplinaires du problème servant à évaluer (cf. également, Nabbout, 2006).

Double orientation didactique et apports de la didactique des mathématiques pour étudier l'activité des évaluateurs

Cette première recherche menée entre 2000 et 2004 s'inscrit très clairement dans une double orientation didactique : didactique des mathématiques et didactique professionnelle. Sur le plan méthodologique, sa principale source d'inspiration est la didactique professionnelle (Pastré, 2011). L'idée de « situations aménagées » (Vantourout, Goasdoué, Maury & Nabbout, 2012), qui sont un type particulier de simulations, est inspirée des ingénieries de la didactique professionnelle. Ces situations sont qualifiées « d'aménagées » au regard de la distance qui les séparent de la situation dite de « référence », c'est-à-dire avec celles qui existent sur le terrain et que l'on cherche à reproduire, lors de cette recherche des situations d'évaluation formative interactive (Allal, 1979). Dans nos situations aménagées, « ce ne sont pas les appariements de surface qui sont recherchés, mais prioritairement des équivalences fonctionnelles » (Vantourout & al., 2012, p. 191-192). Ces situations permettent, grâce à la manipulation de variables, de proposer des situations d'évaluation où sont modélisés des comportements d'élèves représentatifs d'un point de vue didactique. « On associe au contrôle des variables une analyse de l'activité qui offre une description du comportement des évaluateurs qui s'avère plus riche que celle habituellement conduite dans un cadre expérimental où, pour les travaux sur l'évaluation, l'on prend uniquement en compte la note attribuée par l'évaluateur » (Idem). Avec les situations aménagées, nous réduisons « la complexité des situations de référence dans des proportions que nous estimons « raisonnables », au sens où, du point de vue du fonctionnement cognitif des évaluateurs, nous faisons l'hypothèse qu'il existe des similarités importantes entre les deux situations » (Vantourout & al., 2012, p. 195).
L'autre spécificité de ces situations, par rapport aux copies construites (Noizet & Caverni, 1978) est l'appui sur des travaux issus des « didactiques disciplinaires ». L'ancrage dans le champ de la didactique des mathématiques se manifeste à deux niveaux. D'abord, certainement

le plus important, celui qui renvoie à l'élaboration du matériel expérimental (cf. Annexe 2) présenté lors des situations aménagées[2]. Il s'agit des réponses et des verbalisations de binômes d'élèves « fictifs[3] » ayant résolu des problèmes de proportionnalité impliquant des représentations graphiques. Le matériel à évaluer ne peut faire l'objet d'un avis tranché. Son élaboration implique des analyses a priori, réalisées selon deux plans. Elles concernent, d'une part, les problèmes retenus, c'est-à-dire les tâches censées être proposées aux élèves fictifs, et, d'autre part, l'invention des productions et des comportements attribués à ces élèves. Ces analyses a priori font intervenir des connaissances en didactique relatives à la proportionnalité et aux graphiques. La présence de graphiques vise à engendrer des situations d'évaluation rendues relativement complexes en raison des difficultés que soulève l'utilisation de ce type de représentations (Maury, 2002). Bref, nous accordons de l'importance aux contenus mathématiques impliqués dans les productions à évaluer, ainsi qu'aux connaissances sur les apprentissages relatifs à ces contenus. La constitution du matériel expérimental fait appel à des éléments théoriques qui sous-tendent l'analyse a priori de la tâche et l'analyse de l'activité de l'évaluateur. Plus précisément, la construction du matériel (copies, productions d'élèves, échanges verbaux) repose sur des hypothèses quant aux conceptions et raisonnements des élèves et des évaluateurs. Le fait de construire les productions à évaluer nous permet de retenir et d'aménager « des comportements d'élèves qui correspondent à des procédures caractéristiques, en faisant de sorte que celles-ci véhiculent également des éléments pouvant favoriser l'apparition chez certains évaluateurs de conceptions relatives aux notions mathématiques en jeu, et, éventuellement, d'autres conceptions plus générales relatives à l'évaluation » (Vantourout & al., 2012, p. 199). Le second niveau de l'ancrage didactique « touche à des aspects plus généraux de la didactique des mathématiques (que l'on retrouve d'ailleurs en didactique des sciences) qui consistent, dans une double inspiration constructiviste et bachelardienne, à considérer l'erreur comme un indicateur du fonctionnement d'une connaissance et donc à s'attacher, à partir des observables, à identifier et à analyser les procédures et leur signification au niveau des connaissances. En ce sens, notre travail peut être rapproché des recherches en didactique qui, sur la base de cette conception de l'erreur, s'intéressent, plus ou moins directement, à la manière dont les enseignants de mathématiques prennent en compte les erreurs et les réussites des élèves » (Vantourout & Maury, 2006, p. 772). Soulignons que c'est, entre autres, autour de la notion d'erreur et de son analyse que se réalise la jonction entre évaluation formative et didactique.

Analyse de l'activité des évaluateurs : le rôle des connaissances

Bien que le terme « connaissances » figure dans le modèle « référent/référé » (cf. Annexe 1, « Corps de connaissances »), les connaissances des évaluateurs n'ont jamais été prises en compte par les docimologues et docimologues expérimentaux qui au fond se sont peu intéressés au fonctionnement cognitif des évaluateurs si ce n'est en recherchant des déterminants très généraux. Or, les connaissances mobilisées, ou non, constituent pour nous des déterminants de l'activité d'évaluation internes à l'évaluateur. Précisons que l'intérêt porté aux connaissances

---

[2] Lors des expérimentations, les situations aménagées sont présentées aux évaluateurs via un CD-Rom. Phase 1, ils travaillent seuls face à un ordinateur (un dispositif permet d'enregistrer leur activité) et doivent répondre à la consigne suivante : « En quoi les productions et réponses de ces élèves sont-elles satisfaisantes et/ou non satisfaisantes ? ». Phase 2, en binôme, ils doivent discuter et s'accorder sur une évaluation commune. Phase 3, ils participent individuellement à un débriefing. Toutes les phases sont filmées. Transcription des verbalisations des phases 2 et 3.

[3] Les professeurs évaluent des travaux attribués à des élèves absents et qu'ils ne connaissent pas. Ces travaux ont été élaborés, pour les besoins de l'expérimentation, à la suite d'observations de binômes d'élèves « réels » auxquels nous avions demandé de résoudre le même problème. Notons que ces élèves ne sont représentés que par des traces de leur activité (simulation fonctionnelle).

de l'évaluateur n'a pas pour finalité de juger de sa légitimité en tant qu'évaluateur, mais de mieux comprendre le rôle de celles-ci dans les processus d'évaluation.

En étudiant l'activité de professeurs[4] confrontés aux situations aménagées, nous avons identifié trois grands pôles de connaissances : pôle « disciplinaire », « évaluation » et « socio-psycho-pédagogique » (Vantourout & Maury, 2006). Au sein du pôle disciplinaire, nous distinguons les connaissances liées aux mathématiques et aux représentations graphiques et les connaissances liées à la didactique des mathématiques[5]. Ces dernières s'observent (sont inférées) quand les enseignants se concentrent sur l'identification et l'étude des procédures mises en œuvre par les élèves. Si la majorité des enseignants observés marque de l'intérêt pour les procédures et reconnait les situations où une analyse didactique est pertinente (16 enseignants sur 18, mais avec une différence quantitative individuelle très importante), ce n'est qu'exceptionnellement qu'un professeur parvient à conduire une véritable analyse didactique, c'est-à-dire à mener une analyse explicative de l'activité de l'élève en mobilisant des connaissances valides liées à la didactique des mathématiques. Ces dernières représentent moins de 0,25% des occurrences de connaissances que nous avons relevées, bien que ces professeurs, anciens étudiants et stagiaires en IUFM, aient reçu une formation en didactique des mathématiques. Ce résultat renvoie à la question de la pragmatisation des savoirs en connaissances opérationnelles qu'aborde la didactique professionnelle (Pastré, 2011).

De fait, comme cela apparaît dans les résultats, mener une véritable analyse didactique requiert la mobilisation de connaissances dites de « niveau conceptuel supérieur » (Vantourout & Maury, 2006). Au sein des connaissances disciplinaires liées aux mathématiques et aux représentations graphiques, nous distinguons les connaissances de ce niveau de celles dites « de base ». Ces dernières, aux occurrences très nombreuses, sont mobilisées par tous les évaluateurs : elles ont comme principale caractéristique de permettre de « faire » le problème, elles suffisent pour répondre à l'ensemble des questions contenues dans les énoncés de l'expérimentation. Parmi leurs fonctions, on trouve celle de permettre de se prononcer sur la justesse, la fausseté, les imperfections et les erreurs des réponses numériques ou graphiques ou encore celle permettre l'énonciation et la reconnaissance de notions en jeu dans le problème. Les connaissances de niveau conceptuel supérieur permettent de modéliser la situation, de comprendre au plan mathématique et d'expliquer les procédures des élèves. Elles permettent de de traiter la relation « signifiant/signifié » (par exemple, le lien entre la pente d'une droite et le coefficient directeur d'une fonction linéaire ou affine) ou en encore d'amener une solution « experte » (par exemple, un graphique qui représente dans un problème de concentrations à la fois les quantités et les proportions). Enfin, nous avons relevé des connaissances « erronées ou inexactes », mobilisées uniquement par des professeurs des écoles de formation « non-scientifique »[6].

Le principal résultat de cette recherche est de montrer que :

- des jugements évaluatifs identiques ou (très) proches peuvent reposer sur des connaissances différentes, dont certaines erronées ou inexactes ;
- des connaissances analogues peuvent conduire à des jugements évaluatifs différents, voire opposés.

[4] Il s'agit de 18 enseignants en fin de formation initiale (IUFM), 12 professeurs des écoles et 6 professeurs de mathématiques (PLC).

[5] S'ajoutent des connaissances curriculaires dont nous ne parlerons pas ici.

[6] Les professeurs des écoles de formation « scientifique » possèdent au minimum un baccalauréat scientifique. Les PLC sont tous considérés de formation « scientifique ».

Nous allons illustrer cela brièvement à partir de l'évaluation d'une réponse graphique présentée lors d'une situation aménagée. Il s'agit d'un problème de location de cassettes vidéo, avec trois tarifs différents, dont deux avec abonnement. Les élèves devaient, entre autres, compléter un graphique (sur lequel sont déjà représentés deux des tarifs) en représentant la formule de tarification avec abonnement à 250 francs et 10 francs par cassette louée (cf. Annexe 3). Les élèves d'un binôme ne font pas débuter leur tracé au point (0, 250), mais à l'origine du repère, puis placent le point (1, 260). Sur le plan des jugements évaluatifs, dix-sept des dix-huit professeurs s'accordent pour reprocher aux élèves de faire débuter leur graphique à l'origine. Seul l'un d'entre eux hésite à émettre une critique sur ce point : il défend l'idée selon laquelle faire débuter le graphique à l'origine dénote d'une logique concrète (cf. infra enseignant « F »). Nous présentons ici uniquement quelques extraits d'échanges entre enseignants qui doivent s'accorder sur une évaluation commune. Pour l'analyse détaillée de la diversité des connaissances mobilisées par les évaluateurs nous renvoyons à Vantourout, 2004.

Le jugement des enseignants A et B laisse apparaître une divergence, avec aucune véritable argumentation. Finalement B suivra l'avis de A. Ce qui emporte la décision est la référence aux autres tracés (A2). L'intervention A2 donne aussi une indication sur la manière dont est construit le référent et sur sa solidité.

A1 : Donc, il y a une reprise du tracé graphique, mais je pense qu'il y a quand même l'erreur, car ils débutent de l'origine zéro
B1 : Ce n'est pas une erreur pour moi, ils débutent de l'origine zéro, c'est 250 francs en n'ayant pris aucune cassette, donc, ce n'est pas une erreur
A2 : Comme dans les autres tracés, on prend en compte directement l'abonnement

Les enseignants C et D sont confrontés à un dilemme que nous formulerons ainsi : comment gérer la dimension « réaliste » ou la référence au contexte qui se trouve en décalage avec le recours au modèle des fonctions affines et linéaires ?

C1 : Oui, mais tu ne veux pas louer de cassette tu ne payes pas
D1 : Si tu te casses une jambe et que tu ne peux plus aller à ton truc de vidéo, tu n'auras toujours pas de cassette de louée et puis tu auras quand même payé l'abonnement pour un an, tu ne crois pas ?
C2 : Oui, mais je pense que tu payes l'abonnement à partir du moment où tu loues une cassette … Tu ne vas pas payer l'abonnement sans louer de cassette [Rires]
D2 : Attends, moi je commencerais à 1 ! Mais si attends, alors pourquoi ? Parce que … Oui tu ne loues pas de cassette, tu ne payes pas d'abonnement … Ouais, enfin si c'est vrai ce que tu dis
C3 (faisant référence à une autre formule et à son tracé sur le graphique) : La formule, c'est 100 plus 30 fois x quoi [100 + 30 x], x étant le nombre de cassettes … donc pour x égal zéro, ça fait 100

Les enseignants E et F sont confrontés au même dilemme, mais l'un d'entre eux, F, parvient à prendre en considération la situation concrète évoquée dans l'énoncé et peut s'appuyer sur cette modélisation via les fonctions dans le cadre graphique.

E1 : Alors pour le graphique, il y a un problème pour le prix quand on prend zéro cassette, ils ont mis, ils ont pris l'origine aussi, ils n'ont pas décalé à 250 là
F1 : Ben qui est faux, moi je ne suis pas entièrement d'accord pour dire que c'est faux parce que ça se défend si t'as pas l'intention de louer de cassettes tu ne prends pas d'abonnement, donc finalement ça ne coûte rien
E2 : Ouais, mais enfin l'abonnement tu le payes après si tu veux zéro cassette tu as quand même payé tes 250 francs, si tu tombes malade ou je ne sais pas quoi
F2 : Cela dit souvent le jour où tu vas prendre ton abonnement tu prends une cassette, donc si tu n'as pas pris de cassette, c'est que tu n'avais pas … Ouais enfin, moi je dis que ça se défend, zéro, zéro (0,0) […]
E3 : Ouais … Je ne sais pas si tu n'analyses pas un peu trop ?
F3 : C'est vrai qu'on part du schéma des fonctions affines, mais justement je n'ai pas fait attention […] Donc moi, enfin je préfère privilégier le sens … Pour moi, qu'ils aient mis le point là ou là, ce n'est pas très important, je ne

trouve pas ça insatisfaisant qu'ils aient mis le zéro, zéro, je ne trouve pas que ça soit un problème

Outre la question de la diversité connaissances mobilisées, se pose également, dans une perspective d'évaluation formative, celle de la diversité des feedbacks adressés aux élèves.

LA CORRECTION DE DISSERTATION EN SCIENCES ECONOMIQUE ET SOCIALE

La seconde illustration des options théoriques et méthodologiques que nous défendons pour l'étude de l'activité des évaluateurs vient d'une recherche menée sur la correction de dissertations en sciences économiques et sociales (Vantourout & Goasdoué, 2011). Bien que changeant de domaine disciplinaire, ce travail s'inscrit dans le prolongement des travaux menés en mathématiques, tout explorant des questions sur les jugements des enseignants moins saillantes dans la recherche précédente. Nous avons en effet choisi d'aller vers une épreuve plus ouverte, au sens où l'ensemble des solutions également valables est plus important, vers une matière où il est moins facile de trancher sur le caractère juste ou faux d'une réponse. Ces deux caractéristiques permettent par ailleurs de réinterroger la pertinence de la comparaison « référent/référé », puisqu'évidemment aucun enseignant ne s'engage dans la correction avec une « dissertation modèle » en tête. L'absence d'un référent identifiable ne signifie pas pour autant l'absence d'attentes très précises, mais nous les qualifierions alors plutôt de réseaux d'attentes que de référent.
Dans la continuité des travaux menés précédemment, cette enquête s'appuie sur une analyse détaillée des verbalisations d'enseignants au cours de leur correction de copies. Il s'agit à nouveau d'une situation aménagée, car ce travail d'explicitation de l'activité de correction est, dans une certaine mesure, artificiel tout en étant bien un témoignage du fonctionnement cognitif du correcteur. Après un temps de « préparation » du sujet de la dissertation, nous demandions aux enseignants de verbaliser tous les commentaires qu'ils jugeaient nécessaires pour que l'on comprenne leur activité de correction. Toujours dans l'idée de prolonger dans une autre perspective les travaux en docimologie, nous avons sélectionné trois copies dont une moins bonne et deux moyennes, car ces dernières sont identifiées de longue date (cf. Laugier, Weinberg 1936, cités par Piéron 1963) comme suscitant un maximum de divergences. Tous ces choix, une tâche ouverte, des réponses pas nécessairement tranchées, des copies moyennes, offrent une sorte de cas « extrême » pour mettre à l'épreuve les principaux résultats et hypothèses de la docimologie : les divergences entre évaluateurs et la comparaison « référent/ référé ». Enfin pour évacuer l'effet possible du niveau de formation et de maîtrise des contenus évalués, nous nous sommes adressés à des enseignants expérimentés et presque tous agrégés en Sciences Economiques et Sociales.
Le premier constat quantitatif des divergences de notation est conforme à tout ce qui a été écrit à ce sujet depuis les travaux pionniers des docimologues des années 1930, la même copie à reçu la note de 8/20 ou 16/20 selon le correcteur. L'intérêt majeur de ce travail ne réside évidemment pas dans la répétition de ce constat, mais dans l'analyse du lien que l'enquête permet de faire entre notation et jugement. Si on compare les correcteurs par paires, on peut par exemple remarquer que des écarts plus faibles en nombre de points ne s'accompagnent pas nécessairement d'une convergence accrue de jugements simplement caractérisés par leur valence positive ou négative (cf. Vantourout & Goasdoué, 2010 ; Goasdoué, Vantourout & Bedoin (à paraître) pour plus de détail). Inversement, des enseignants ayant davantage de jugements communs à propos des mêmes éléments mettent des notes plus divergentes. Ce premier constat conduit évidemment à différencier divergences de jugement et divergences de notation. La nature de l'épreuve et les techniques de correction pourraient être invoquées pour expliquer ces décalages entre jugements et notation. L'adoption d'un barème commun pourrait

être vu comme une solution à ces divergences or il n'en est rien (Vantourout & Goasdoué, 2010). En effet, parmi les enseignants interrogés, plusieurs corrigeaient à l'aide d'une grille commune très détaillée à laquelle ils confiaient en quelque sorte le choix de la note qui n'était plus qu'une somme de l'ensemble des points accordés par items de la grille. Les divergences de notation entre ces correcteurs n'étaient pas inférieures à celle avec d'autres correcteurs corrigeant sans grille[7]. Une analyse plus approfondie, permit de constater que si de nombreux enseignants s'intéressaient aux mêmes passages de la dissertation (80% des verbalisations sont concentrées sur les mêmes phrases), ils n'en tirent pas toujours les mêmes conséquences. On retrouve ici les constats faits dans l'étude sur les représentations graphiques et la proportionnalité, la convocation d'une même connaissance ne conduit pas nécessairement au même jugement évaluatif comme en témoignent les extraits suivants :

A la lecture de ces deux phrases de la copie : *« Les syndicats sont devenus des institutions, c'est pourquoi les salariés ne se reconnaissent plus dans les syndicats et n'y adhèrent donc plus. Les représentants des syndicats ne sont plus des salariés c'est pourquoi on peut se demander si les syndicats défendent leurs propres intérêts ou ceux des adhérents. »*

- Un premier enseignant dit : « *Très bon mécanisme, très bonne argumentation. Chose loin d'être simple à comprendre pour des élèves de terminale. Ce n'est pas évident pour l'élève de comprendre que l'institutionnalisation provoque une sortie des délégués syndicaux trop fréquente de l'entreprise pour qu'il y ait un contact important entre les collègues* »
- Un second affirme au contraire que : « *Il faut définir le terme institution ; On parle plutôt d'institutionnalisation des syndicats* » et ajoute sur la copie : « *Ne sont plus des salariés présents dans l'entreprise. Donner un exemple pour construire la démonstration* »

Les deux correcteurs mobilisent la même notion d'institutionnalisation. Toutefois, seul le premier fait crédit à l'élève de la connaissance que les salariés ne sont plus présents dans l'entreprise, mais toujours rémunérés par elle. Le second correcteur pointe l'ambiguïté de la phrase, ce qui débouche évidemment sur des jugements différents.

Cet exemple montre à quel point la correction est une lecture singulière et approfondie de la copie où l'élève est présent à travers son texte. Le texte n'est pas pris comme une simple réponse, mais plutôt comme le symptôme d'un fonctionnement cognitif. L'intention ou la finalité de lecture de correction est implicitement diagnostique, c'est, comme l'affirmait Amigues (1996), une forme de dialogue différé. La correction et la notation d'une dissertation ne sont clairement pas une quantification des qualités de la copie. On perçoit ici le décalage profond entre la nature de cette activité et les critères d'évaluation de celle-ci imposés dans les travaux en docimologie. La fidélité, bien que posant des problèmes concrets très importants, notamment pour les examens, ne saurait être le seul critère de validité d'une évaluation. Sur l'ensemble des jugements produits par les enseignants presqu'aucun ne pourrait être qualifié d'erroné au sens décrit dans la première étude. Tous s'appuient sur des connaissances et des éléments bien clairs et légitiment relevés de la copie. En ce sens, on se démarque nettement des conclusions des docimologues qui tendent à disqualifier la validité d'une épreuve comme la dissertation.

Outre la question des divergences, cette étude contribue également à remettre en cause la place de de la comparaison « référent/référé » dans la description de l'activité des évaluateurs. Remettre en cause la place accordée à ces processus ne conduit cependant pas à dénier toute cohérence à l'activité de correction et à supposer que l'enseignant procède par induction sans attente préalable. La technique de verbalisation concomitante à l'activité de correction permet au contraire de suivre l'évolution de la représentation que l'enseignant se fait de la copie. L'évocation fréquente de la cohérence de la copie, ainsi que la formation régulière d'anticipations sur la suite de la copie montre la richesse de cette activité qui ne saurait être

[7] Toutefois, les correcteurs qui utilisent la grille auraient tendance à donner plus de points aux copies « moyennes ». L'utilisation de la grille pourrait servir de « garde-fou » en empêchant de sous-noter ce type de copies, comme le font certains correcteurs (Vantourout & Goasdoué, 2011).

réduite à une comparaison. A contre-pied des docimologues expérimentaux qui considéraient l'évaluation comme un cas particulier de perception (notamment en référence à la perception de grandeurs physiques), ce constat nous a conduit à considérer la lecture de correction plutôt comme un cas particulier de compréhension de texte. Le lecteur correcteur cherche en permanence construire une représentation cohérente du texte lu et, pour y parvenir, il produit de nombreuses inférences sur divers objets tels que les contenus, la structure du devoir ou les qualités « présumées » de l'élève.

POUR UNE APPROCHE PSYCHO-DIDACTIQUE DES EVALUATIONS

L'intention initiale des travaux présentés ici était en quelque sorte de poursuivre le projet déjà formulé, mais jamais vraiment réalisé dans les années 1930, d'étudier « la psychologie des examinateurs » (cf. In Piéron, 1963). Notre but était également de décrire les déterminants de l'activité évaluative notamment pour penser la formation à l'évaluation. Si nous partageons avec les docimologues ce postulat que mieux comprendre les examinateurs pourrait faire évoluer les pratiques d'évaluation, les chemins que nous empruntons sont nettement différents. Implicitement nous considérons que la portée diagnostique des évaluations est une dimension essentielle dans le champ scolaire. Si la psychométrie et ses développements récents ont permis d'améliorer la finesse discriminative des tests, la signification des différences constatées ne peut avoir de sens, selon nous, qu'au regard d'une analyse des épreuves et de l'activité de réponse des élèves.
Ce parti pris impose naturellement le recours aux didactiques disciplinaires et à la psychologie cognitive. Ainsi nous défendons, à l'instar de travaux plus centrés sur l'apprentissage (Maury, 2001), une approche psycho-didactique des évaluations (Vantourout & Goasdoué, 2014). Cette conjonction théorique et méthodologique permet d'une part de rendre compte de la spécificité des contenus évalués et d'autre part d'analyser les différents plans de l'activité évaluative : conception d'épreuve, réponse des évalués et correction. Bien que portant sur l'activité de correction, les travaux présentés ici permettent de penser plus généralement la question de la ou des validités des épreuves scolaires. S'assurer de la validité des épreuves ne saurait être résumé à des choix méthodologiques judicieux. De la même manière, la validité épreuves scolaires ne saurait se résumer à leurs qualités métriques de fidélité ou encore de finesse discriminative.
L'approche que nous défendons, bien que radicalement différente, n'est pas en conflit avec les conceptions psychométriques de la validité. À l'instar de notre travail sur la notation qui conduit à différencier validité de l'évaluation et validité des notes, nous défendons que la validité des épreuves ne peut être seulement abordée à travers une analyse des scores. Le constat d'un ensemble de réussites ou d'échecs à un ensemble d'items ne peut être signifiant qu'au travers d'une analyse a priori des items et complémentairement d'une analyse de l'activité de réponse des évalués ou des correcteurs. Ainsi de même que les connaissances didactiques sont essentielles pour garantir la validité des jugements lors de corrections, les choix méthodologiques dans la conception d'épreuves devraient être guidés par ces mêmes préoccupations. Pour compléter et clore l'éventail des questions qui nous semblent essentielles en évaluation, il reste à évoquer les considérations curriculaires qui ne sont pas traitées dans notre approche psycho-didactique qui a d'abord été conçue pour analyser l'activité des évaluateurs dans le cadre d'évaluations internes. La notion de validité épistémo-didactique proposée et développée dans cette séance de séminaire (cf. Grugeon & Grapin) est ainsi un complément essentiel notamment pour l'analyse de la validité dans la conception d'épreuve.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLAL L. (1979). Stratégies d'évaluation formative : conceptions psycho-pédagogiques et modalités d'application. In L. ALLAL, J. CARDINET ET P. PERRENOUD (Eds.) L'évaluation formative dans un enseignement différencié, 130-157. Berne : Peter Lang.

AMIGUES R., BONNIOL J.-J., CAVERNI J.-P., FABRE J.-M., NOIZET G. (1975). Le comportement d'évaluation de productions scolaires : à la recherche d'un modèle explicatif. *Bulletin de psychologie, 28,* 793-799.

AMIGUES R., & ZERBATO-POUDOU, M.-T. (1996). *Les pratiques scolaires d'apprentissage et d'évaluation*. Paris : Dunod.

BARBIER J.-M. (1985). L'évaluation en formation. Paris : PUF.

BODIN A. (2006). Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. Repères IREM n° 65, 55-89. www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/65bodin.pdf

CARDINET J. (1973/1988). L'adaptation des tests aux finalités de l'évaluation. In J. Cardinet *Évaluation scolaire et mesure* (pp. 24-59). Bruxelles : De Boeck.

GOASDOUE R., VANTOUROUT, M., BEDOIN D. (à paraître). La correction de dissertations : nouveau regard sur la construction des jugements des évaluateurs. In L. MOTTIER LOPEZ & W. TESSARO, *Le jugement professionnel des enseignants*. Berne : Peter Lang.

HADJI C. (1997). *L'évaluation démystifiée.* Paris : ESF.

HADJI C. (1992). *L'évaluation des actions éducatives.* Paris : PUF.

HADJI C. (1989). *L'évaluation, règle du jeu.* Paris : ESF.

MAURY S. (2001). Didactique des mathématiques et psychologie cognitive : un regard comparatif sur trois approches psychologiques. *Revue française de pédagogie n° 137,* 85-93.

MAURY S. (2002). A look at some studies on learning and processing graphic information, based on bertin's theory. In F. HITT (dir.), *Representations and Mathematics Visualization* (p. 297-309). Mexico : Cinestav - IPM.

NABBOUT M. (2006). Enseignement des probabilités en terminale au Liban : études des représentations et des pratiques dans des situations aménagées. Thèse non-publiée. Université René Descartes – Paris 5 Sorbonne.

NOIZET, G., CAVERNI, J.-P. (1978). Psychologie de l'évaluation scolaire. Paris : PUF.

PASTRE P. (2011). *La didactique professionnelle*. Paris : PUF.

PIERON, H. 1963. *Docimologie et examens*. Paris : PUF.

RODITI E., SALLES F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation & Formations, n° 86-87*, 235-257.

VANTOUROUT M., GOASDOUE R. (2014). Approches et validité psycho-didactique des évaluations. *Éducation & Formation – e-302*, 139-155.

VANTOUROUT M., GOASDOUE R., MAURY S., NABBOUT M. (2012). A la frontière entre l'écologique et l'expérimental : des situations aménagées pour l'étude de l'activité évaluative en mathématiques. In M. Altet, M. Bru, C. Blanchard-Laville (Eds.) *Observer les pratiques enseignantes* (pp.191-204). Paris : L'harmattan.

VANTOUROUT M., GOASDOUE R. (2011). Correction de dissertations en SES. *Idées*, 163, 71-77.

VANTOUROUT M., GOASDOUÉ, R. (2010). Correction de dissertations : analyse de l'activité de professeurs engagés dans une approche pas compétences. In Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF), Université de Genève, 13-16 septembre. 12 pages (en ligne).

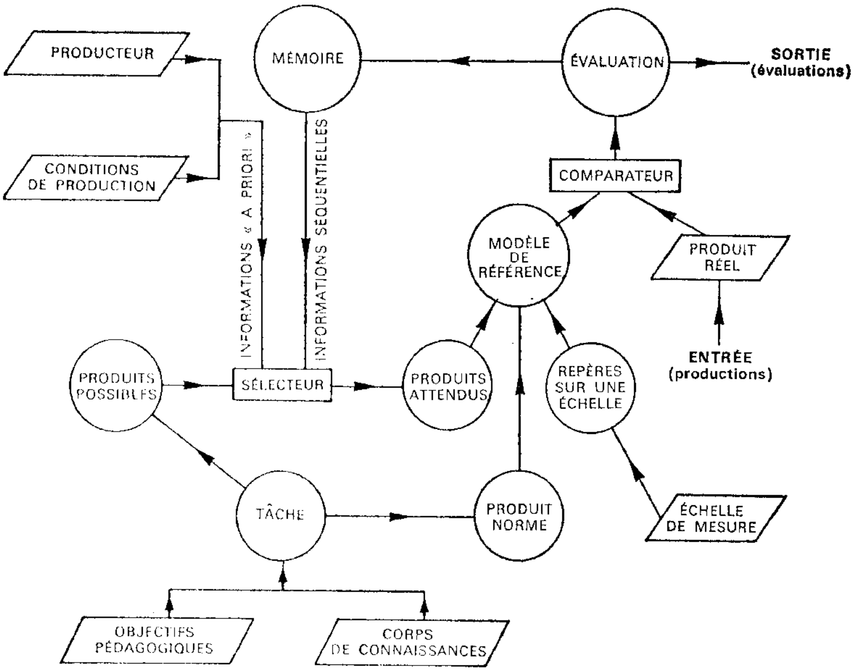
VANTOUROUT M. (2007). Étude de l'activité évaluative de professeurs stagiaires confrontés à des productions d'élèves en mathématiques : quel référent pour l'évaluateur ? *Mesure et évaluation en éducation, vol. 30, n°3,* 29-58.

VANTOUROUT M., MAURY S. (2006). Quelques résultats relatifs aux connaissances disciplinaires de professeurs stagiaires dans des situations simulées d'évaluation de productions d'élèves en mathématiques. *Revue des sciences de l'éducation, vol. 32, n°3,* 759-782.

VANTOUROUT M. (2004). Étude de l'activité et des compétences de professeurs des écoles et de professeurs de mathématiques dans des situations « simulées » d'évaluation à visée formative en mathématiques. Thèse non-publiée. Université René Descartes – Paris 5 Sorbonne.

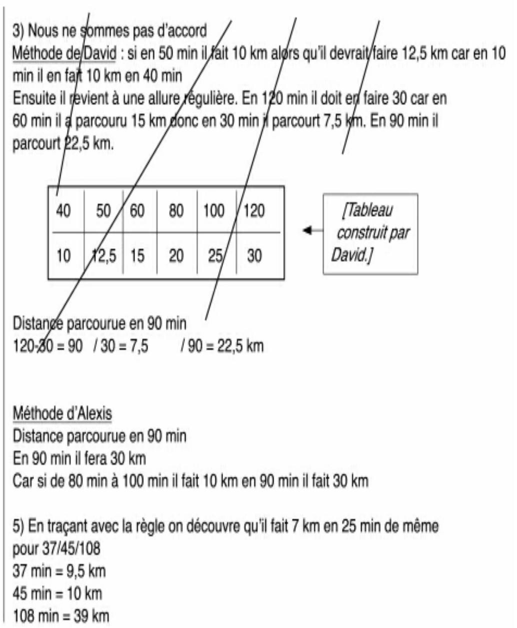
Annexes

Annexe 1 : modele explicatif des comportements d'evaluation de productions scolaires – Noizet & Caverni, 1978, p. 115



Annexe 2 : types de pages presentees lors des situations amenagees (probleme : le cycliste)

Réponse écrite Alexis et David



3) Nous ne sommes pas d'accord
Méthode de David : si en 50 min il fait 10 km alors qu'il devrait faire 12,5 km car en 10 min il en fait 10 km en 40 min
Ensuite il revient à une allure régulière. En 120 min il doit en faire 30 car en 60 min il a parcouru 15 km donc en 30 min il parcourt 7,5 km. En 90 min il parcourt 22,5 km.

40	50	60	80	100	120
10	12,5	15	20	25	30

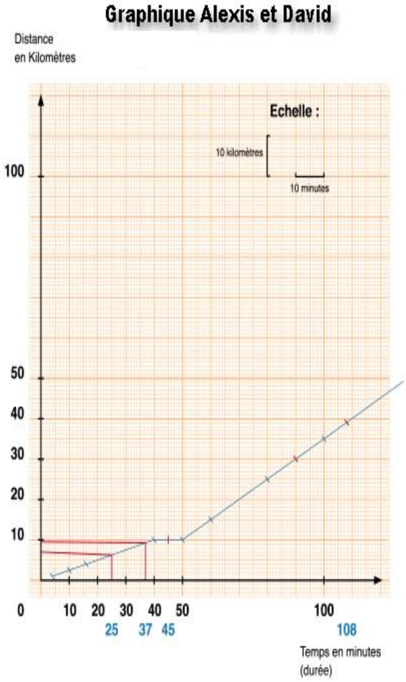
[Tableau construit par David.]

Distance parcourue en 90 min
120-30 = 90 / 30 = 7,5 / 90 = 22,5 km

Méthode d'Alexis
Distance parcourue en 90 min
En 90 min il fera 30 km
Car si de 80 min à 100 min il fait 10 km en 90 min il fait 30 km

5) En traçant avec la règle on découvre qu'il fait 7 km en 25 min de même pour 37/45/108
37 min = 9,5 km
45 min = 10 km
108 min = 39 km

Graphique Alexis et David

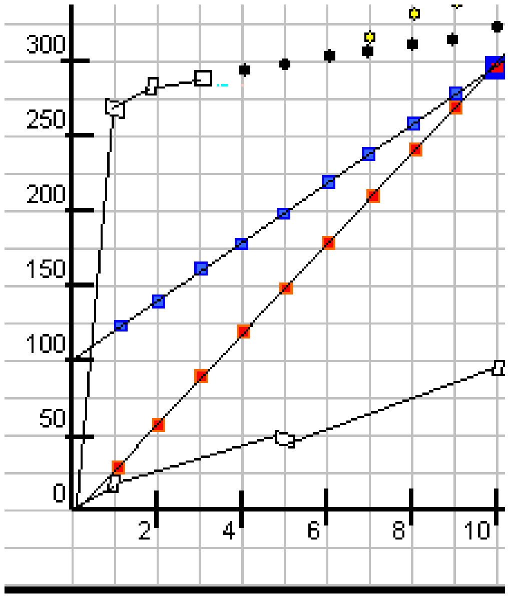


Les évaluateurs ont également accès à la transcription des échanges entre Alexis et David alors qu'ils résolvent en binôme le problème.

ANNEXE 3 : PROBLEME « LOCATION DE CASSETTES VIDEO »

PRODUCTION GRAPHIQUE D'UN BINOME D'ELEVES

(Les tarifs « a » et « b », respectivement en rouge et bleu, sont déjà placés sur le graphique ; les élèves ne doivent représenter que le tarif « c », en noir et jaune).



RÉGULER L'ENSEIGNEMENT EN ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE : UNE APPROCHE MULTIDIMENSIONNELLE

Brigitte **GRUGEON-ALLYS**
Université Paris Est-Créteil - ESPE
Laboratoire de didactique André Revuz
brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Résumé
Nous interrogeons les projets pluridisciplinaires (Grugeon, 1997 ; Delozanne, Prévit, Grugeon-Allys et Chenevotot-Quentin 2010 ; Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin, Delozanne 2012 ; Pilet 2012) portant sur l'évaluation diagnostique *Pépite* et la régulation de l'enseignement et des apprentissages. La recherche menée dans le cadre du projet ANR NéoPraéval[1] nous amène à prendre en compte les champs de recherche en didactique des mathématiques et sur l'évaluation. A partir d'une approche multidimensionnelle croisant ces champs de recherche, nous dégageons les apports des outils conceptuels de la didactique (TAD et TSD) pour étudier la validité de dispositifs d'évaluation, leur conception et leurs usages. En effet, ces outils permettent d'une part, de décrire les praxéologies apprises des élèves, de les catégoriser en perspective de l'enseignement reçu et d'autre part, de dégager des conditions pour réguler l'enseignement, à des niveaux scolaires donnés. Cette approche permet de prendre en compte les besoins d'apprentissages des élèves mis en évidence par l'évaluation diagnostique et les besoins d'apprentissage ignorés dans les programmes pour définir les praxéologies mathématiques et didactiques à développer et la gestion des interactions. Nous l'illustrons dans le domaine algébrique en fin de scolarité élémentaire à partir de l'évaluation diagnostique *Pépite* et des parcours d'enseignement différencié (Pilet 2012). Nous dressons des perspectives de recherche.

Mots clés
Approche multidimensionnelle, évaluation diagnostique, validité d'une évaluation, praxéologie épistémologique de référence, régulation de l'enseignement.

INTRODUCTION

Depuis les années 1990, nous avons développé des projets pluridisciplinaires *Pépite – PépiMep* (Delozanne et al. 2010 ; Grugeon-Allys et al. 2012). Quels sont les objectifs de ces projets ? Leur objectif principal est d'outiller les enseignants à gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et à réguler leur enseignement dans le domaine de l'algèbre élémentaire dans l'enseignement secondaire en France. Ces projets visent aussi à concevoir des ressources, numériques ou non, et à analyser leurs usages dans des classes « ordinaires ». Ils ont été menés par des chercheurs travaillant dans différents champs de recherche - didactique des

[1] NéoPraéval : *Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'évaluation et d'enseignement des mathématiques*, convention ANR-13-APPR-002-01. http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

mathématiques, informatique, ergonomie cognitive, sciences de l'éducation -, des enseignants et des formateurs. Ils ont permis de développer un travail collaboratif avec des enseignants des groupes IREM. Des ressources d'évaluation - l'évaluation diagnostique automatique *Pépite* (Grugeon 1997 ; Grugeon-Allys et al. 2012) -, de régulation - les Parcours d'Enseignement Différencié (PED) automatisés (Pilet 2012) - ont été conçues et implémentées sur une base d'exercices en ligne *LaboMep*[2] et sont utilisées par des enseignants du secondaire. Ces travaux se poursuivent en ce moment dans le cadre du projet ANR *NéoPraéval* et le *Léa*[3].

Depuis 2014, l'engagement dans le projet ANR permet de revisiter les problématiques développées dans les projets précédents en croisant les champs de recherche pris en compte initialement et le champ de l'évaluation. C'est un changement de point de vue qui vise davantage à considérer l'évaluation comme un objet d'étude. Dans ce contexte didactique, nous interrogeons les choix théorique et méthodologique fondant les projets *Pépite* (Delozanne et al., 2010), PépiMep (Grugeon-Allys et al. 2012) au filtre de notions développées dans le champ de l'évaluation, plus particulièrement, celle de la validité didactique d'une évaluation (Grugeon-Allys et Grapin intra 2015 ; Vantourout et Goasdoué 2014). Nous étendons notre regard sur différents types d'évaluation et cherchons à définir des conditions pour développer l'évaluation au service des apprentissages des élèves dans le système éducatif et une meilleure articulation entre problématiques évaluative et didactique.

Dans ses travaux, Bodin (1997) questionnait déjà la distinction des problématiques didactique et évaluative relatives aux différentes étapes de toute action didactique, développées le plus souvent indépendamment l'une de l'autre. Il défendait une plus grande intégration pour favoriser des pratiques d'évaluation au service des apprentissages des élèves alors que ces pratiques rencontrent de nombreuses difficultés. Il interrogeait

> *« l'évaluation (qui) intervient (…) tantôt avec le propos de juger, de classer ou de certifier, tantôt avec celui de comprendre les processus et d'aider les élèves » à travers ses fonctions, sommative, formative, diagnostique et que « l'évaluation oscille toujours entre le désir de mesurer à tout prix et la volonté d'expliquer, de donner du sens aux observations qu'elle permet de faire » (Bodin, 1997, p 60).*

Deux phénomènes l'illustrent encore :

- la prégnance de la « note assignée par le correcteur (qui) n'est pas une mesure » déjà dénoncée par Chevallard et Feldmann (1986) et de l'évaluation sommative (Rey et Feyfant 2014) ;
- le poids accordé aux évaluations standardisées[4] à grande échelle, à l'international ou en France, évaluations fondées essentiellement sur une approche psychométrique[5]. Or, dans la plupart des pays de l'OCDE, l'étude des effets des évaluations standardisées sur les performances des élèves en termes d'efficacité ou d'inégalité scolaire reste faible (Mons 2009). Ainsi l'approche didactique permettrait d'interroger à différents niveaux de granularité la

[2] *LaboMep* : plateforme en ligne de l'association des professeurs de mathématiques Sésamath : http://www.labomep.net/

[3] *Léa* : Les LéA, Lieux d'éducation associés, ont été définis dans le programme scientifique de l'IFÉ. http://ife.ens-lyon.fr/lea

[4] Les évaluations externes standardisées visent soit, à dresser le bilan des acquis des élèves à la fin d'un enseignement (en France, évaluations bilan comme CEDRE en fin de CM2 ou en fin de 3e), soit à piloter et évaluer le système éducatif, soit à faire évoluer le processus d'apprentissage des élèves en repérant les besoins d'apprentissage pour adapter l'enseignement (évaluations diagnostiques) (Rapport Eurydice 2009)

[5] Dans une approche psychométrique, la conception des items, l'analyse des réponses et des résultats sont menées par des experts du domaine (enseignants et inspecteurs) en dehors de la didactique et par des statisticiens qui calculent différents indicateurs psychométriques et sélectionnent les items retenus. Le modèle statistique utilisé dans ces évaluations est celui du modèle de réponse à l'item (Lescure & Pastor 2012 ; Rocher 2015). La validité de CEDRE repose de ce fait majoritairement sur une approche psychométrique.

conception des évaluations et les relations entre évaluations externes, standardisées ou non, et internes au sein des classes et, plus généralement, leurs effets sur les apprentissages. Nous reprenons la définition de l'évaluation proposée par Bodin, définition recentrée sur « *la valeur* » de « *l'objet* » évalué :

> *« évaluer suppose d'organiser et d'étudier des situations permettant de recueillir des informations qui, après traitement, soient susceptibles de révéler quelque chose de fiable et de substantiel sur la « valeur » d'un « objet »* (Bodin 1997 p.60).

Nous nous demandons si leur conception s'appuie sur une représentativité des tâches au regard du programme évalué pour étudier les acquis des élèves ? Quelles sont les conditions à mettre en place pour concevoir et mettre en œuvre des évaluations externes ou internes valides du point de vue didactique (Vantourout et Goasdoué 2015 ; Grugeon-Allys et Grapin intra 2015) En retour, l'étude des résultats d'évaluations externes permettrait d'interroger le processus d'enseignement et d'apprentissage et de poser la question de la mise en relation entre évaluations externes et internes. En particulier, comment articuler les différents types d'évaluation au cours de l'enseignement d'une notion sur le long terme, dans les différentes étapes de l'action didactique ? Quelles sont les conditions à développer pour permettre aux enseignants de réguler leur enseignement au service des apprentissages des élèves ?

Nous présentons d'abord une approche multidimensionnelle articulant différents champs de recherche autour de l'évaluation et de la didactique des mathématiques, pour concevoir, étudier et mettre en relation les différents types d'évaluations, externe et interne, et les processus d'apprentissage et d'enseignement. En particulier, nous dégageons les apports des outils de la didactique en TAD (Chevallard, 1999) et en TSD (Brousseau, 1986) pour étudier la validité de dispositifs d'évaluation, pour définir une méthodologie de conception et étudier leurs usages. Nous l'illustrons en mettant en évidence les principaux choix théoriques fondant le logiciel d'évaluation diagnostique *Pépite* (Grugeon-Allys et al. 2012) et des PED (Pilet 2012) dans le domaine de l'algèbre élémentaire et leur exploitation en fin de la scolarité obligatoire pour réguler l'enseignement. Pour terminer, nous dégageons des perspectives tant au niveau de la conception des évaluations que de l'intégration entre évaluation et didactique.

UNE APPROCHE MULTIDIMENSIONNELLE POUR CONCEVOIR L'ÉVALUATION AU SERVICES DES APPRENTISSAGES

Les phénomènes d'évaluation sont multiples et complexes liés à la variété des objets possibles de l'évaluation – par exemple, les acquis des élèves en fin d'un processus d'enseignement / apprentissage au regard des programmes scolaires de l'année scolaire[6], les processus d'apprentissage des élèves, les systèmes d'enseignement, … - et des valeurs qui peuvent être de nature épistémologique, normative, critériée. Pour favoriser l'étude de phénomènes didactiques complexes, ici ceux de l'évaluation au service des apprentissages des élèves, nous mobilisons et mettons en relation des théories bien identifiées, du champ de la didactique des mathématiques et de l'évaluation, qui utilisent chacune un filtre conceptuel particulier pour découper la réalité et mobiliser leurs objets d'étude en fonction de différentes entrées (Grugeon-Allys, à paraître). Nous prenons en compte les différentes entrées du triangle didactique pour organiser l'étude.

Un problème posé sur l'axe élève / savoir : une approche cognitive et

[6] Dans le cadre d'évaluations standardisées externes, évaluations nationales (CEDRE) et internationales (TIMSS).

épistémologique

Nous nous centrons ici sur l'élève pris comme sujet cognitif. Evaluer les processus d'apprentissage des élèves en privilégiant un point de vue épistémologique, nécessite de sélectionner et d'étudier des situations pour recueillir des informations qui, après analyse des réponses des élèves permettent de déterminer les connaissances et procédures mobilisées. Sur quel ensemble de situations opérer ce repérage ? Nous reprenons le point de vue développé par Vergnaud (1986) :

> *« (…) il est nécessaire, pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances, d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels. Etudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens » (Vergnaud 1986, p 28).*

Vergnaud introduit une hypothèse forte, la dialectique entre la genèse de la connaissance d'un élève et la structure du savoir mathématique. Pour qu'une évaluation soit au service de l'apprentissage des élèves et de la régulation de l'enseignement, nous pensons qu'elle doit viser l'étude du développement des connaissances des élèves à travers leurs cohérences de fonctionnement dans des domaines mathématiques assez grands. L'évaluation peut ainsi mettre en évidence les conceptions personnelles des élèves.
Nous conservons cette hypothèse dans des contextes d'enseignement en classe ou de régulation des systèmes d'enseignement.

Un problème posé sur l'axe savoir / enseignant : une approche institutionnelle

La prise en compte du cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique

L'étude des conceptions ne prend pas en compte, ni les impacts du contexte institutionnel dans lequel les élèves apprennent, ni ce qui se noue entre l'élève et le savoir dans la relation didactique, rapport personnel de l'élève au savoir confronté au rapport institutionnel (Maury et Caillot, 2003). En effet, les élèves apprennent dans une institution donnée dans laquelle les enseignants enseignent les savoirs et savoir-faire des programmes, à un niveau scolaire donné, à une époque donnée, les programmes variant au cours du processus de transposition didactique (Chevallard 1985). Cette dimension institutionnelle est incontournable pour caractériser l'activité mathématique des élèves, activité organisée autour de la résolution de tâches qui dépendent fortement de l'environnement institutionnel et culturel de chaque pays. Nous nous situons dans le cadre de la TAD pour interroger la conception d'une évaluation externe ou interne ou pour analyser la validité didactique d'une évaluation. Nous faisons l'hypothèse que les approches didactique et psychométrique sont complémentaires pour une telle étude (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015). Nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologie mathématique, c'est-à-dire, de types de tâches et de techniques les résolvant (savoir-faire), une technique étant justifiée par un discours technologique, lui-même étant justifié par une théorie (savoir) (Chevallard 1999). Evaluer les acquis des élèves et les processus d'apprentissage revient à évaluer les rapports personnels des élèves au savoir, c'est-à-dire les praxéologies apprises. La conception d'une telle évaluation, nécessite pour des raisons pratiques, de déterminer un échantillon de types de tâches représentatifs des praxéologies visées, pour un programme donné, associées aux domaines mathématiques en jeu (Chevallard 2007). Comment caractériser les types de tâches constitutifs d'une évaluation ?

Evaluation, transposition didactique et praxéologie épistémologique de référence

Nous prenons en compte le processus de transposition didactique sur le temps long de plusieurs années d'enseignement pour étudier les rapports personnels des élèves aux objets mathématiques étudiés. Une praxéologie épistémologique de référence relative à un domaine mathématique donné (Bosch et Gascon 2005) permet de mettre en relation les praxéologies développées à différents niveaux du processus de transposition didactique, praxéologies à enseigner (programmes), praxéologies enseignées par les enseignants, praxéologies apprises des élèves. Pour chaque domaine mathématique des programmes, nous pensons qu'une des conditions nécessaires pour concevoir une évaluation valide du point de vue de la représentativité des items et de la couverture du domaine (aspect épistémo-didactique) (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015), est de fonder un échantillon de types de tâches constitutifs des praxéologies visées constituant l'évaluation sur une praxéologie épistémologique de référence relative à chaque domaine mathématique.

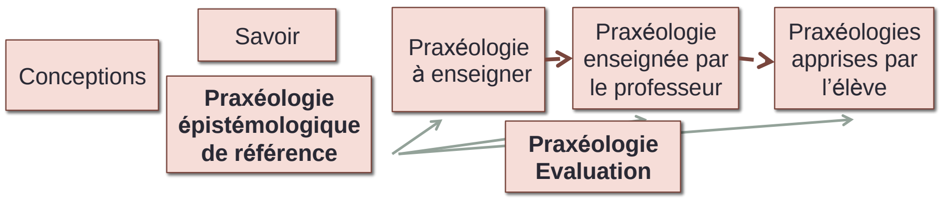


Figure 1 : Evaluation et praxéologie épistémologique de référence (Bosch et Gascon, 2005)

De même, l'étude des évaluations externes ou internes au filtre des praxéologies épistémologiques de référence associées aux différents domaines mathématiques en jeu permet d'étudier la validité didactique. C'est l'étude que nous menons pour l'évaluation CEDRE en CM2 et en 3^{e}, respectivement, dans les domaines mathématiques concernés, le domaine arithmétique au cycle 3 ou le domaine algébrique en fin de scolarité obligatoire. (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015).

En retour, l'analyse des résultats des élèves à ces évaluations peut renseigner sur l'organisation mathématique des savoirs aux différentes étapes de la transposition didactique. En effet, l'analyse statistique des réponses des élèves et leur analyse didactique en appui sur une analyse praxéologique *a priori* des tâches peut rendre compte d'une part, des acquis des élèves et des techniques et technologies mises en œuvre pour résoudre des types de tâches et d'autre part, interroger les praxéologies à enseigner ou enseignées. Cette approche épistémologique permet ainsi d'identifier et de mettre en relation les technologies évanescentes et implicites (Assude et al. 2012)[7] développées dans les praxéologies à enseigner ou enseignées qui peuvent laisser vivre des technologies non idoines dans les praxéologies apprises des élèves, repérables à partir de leurs techniques et erreurs. Nous menons une telle étude dans le cadre du projet ANR en ce qui concerne l'évaluation externe CEDRE en CM2 et en 3^{e}. Cette approche permet aussi de caractériser des besoins d'apprentissages ignorés par l'institution, souvent cruciaux pour l'appropriation des savoirs visés (Castela 2008), et des pistes d'enseignement prenant en compte ces décalages. Localement, elle permet aussi de pointer des éléments de discours, de comparer des techniques et les technologies associées, pour gérer des interactions en classe au service du développement d'une attitude réflexive des élèves. Ce peut être en développant l'étude des raisons d'être mobilisées pour motiver l'enseignement d'un savoir nouveau ou organiser la reprise d'un savoir ancien, en complétant les praxéologies, en poursuivant l'élaboration des éléments technologiques et théoriques dans la construction des savoirs ou en

[7] Pour le domaine algébrique dans l'enseignement secondaire, Pressiat explicite les technologies évanescentes et implicites (Pressiat et al. 2012) développées dans les praxéologies à enseigner ou enseignées, les technologies modélisation, preuve ou calcul algébrique, qui laissent vivre des technologies non idoines, telles que des technologies arithmétique ou formelle dans les pratiques des élèves (Pressiat et al. 2012).

les prenant en compte dans les processus de validation et d'institutionnalisation.
Pour un domaine mathématique des programmes, l'appui sur une praxéologie épistémologique de référence associée permet ainsi de mettre en relation les différents types d'évaluation, externe et interne.

Un problème posé sur l'axe élève / enseignant : évaluation interne et régulation de l'enseignement

Nous recentrons notre étude sur les évaluations internes, tout en gardant notre objectif initial. Dans le champ de la didactique des mathématiques, la problématique de l'évaluation apparaît comme un point aveugle (Chevallard et Feldmann 1986 ; Bodin 1997) en ce qui concerne l'évaluation interne à la classe. Chevallard et Feldmann mentionnent l'importance des phénomènes d'évaluation :

> *« Lorsque [...] le didacticien tente de pénétrer dans l'histoire d'une classe, il doit se rendre à l'évidence : les faits d'évaluation qu'il peut alors y observer ne sont pas simplement un existant contingent, un mal nécessaire que l'on pourrait ignorer, mais bien l'un des aspects déterminants du processus didactique – qui règle et régule tout à la fois les comportements de l'enseignant comme l'apprentissage des élèves. Bref, quiconque pénètre un peu longuement dans la vie d'une classe ne peut longtemps ignorer la "tyrannie" du processus d'évaluation. »* (Chevallard et Feldmann 1986, p.32).

Joshua (1996) considère la question de l'évaluation comme une composante clef du contrat didactique.

> *« L'évaluation ne peut en aucun cas être considérée comme un élément séparé du reste de la réflexion didactique, mais, surtout, il est montré qu'on peut subsumer la question de l'évaluation sous celle plus globale de contrat didactique, ce qui marque une extension considérable de la portée de ce concept. »* (Johsua 1996).

Brousseau (2011) aborde la question de l'évaluation dans le cas Gaël en le formulant explicitement une seule fois :

> *« [...] ce contrat (didactique) régit les rapports du maître et de l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques »* (Brousseau 2011, p.33).

Nous étudions maintenant les articulations possibles entre évaluation et didactique en lien avec les théories didactiques.

Evaluation et moments didactiques

Comment articuler évaluation et didactique pour penser la dynamique du processus d'enseignement / apprentissage ? D'abord, pour prévoir la dynamique entre évaluation et régulation de l'enseignement à une échelle globale, sur la totalité d'une séquence d'enseignement. Nous prenons ici régulation de l'enseignement dans une acception proche de celle de Hadji (1989) qui envisage en termes de temporalité, les différents types d'évaluation et leurs fonctions pour planifier l'enseignement : avant la séquence d'enseignement l'évaluation diagnostique pour orienter et adapter, pendant l'évaluation formative pour réguler, après la séquence l'évaluation sommative pour vérifier. La Théorie Anthropologique du Didactique fournit un cadre pour prévoir et analyser l'organisation mathématique et didactique des savoirs. Chevallard prend en compte l'évaluation dans le modèle des moments didactiques d'une praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$, organisés souvent en plusieurs épisodes éclatés, pour décrire des gestes d'étude incontournables d'un processus d'enseignement (Chevallard 1998, 1999). Chevallard distingue six moments didactiques : les moments de première rencontre avec le type de tâche T, d'exploration de T et d'émergence de la technique τ, de la construction des éléments technologico-théoriques $[\theta/\Theta]$, le moment de l'institutionnalisation, le moment du travail de l'organisation mathématique (entraînement, réinvestissement), le moment de l'évaluation.

L'évaluation apparaît explicitement lors du moment de l'évaluation articulé souvent chronologiquement après l'institutionnalisation[8]. Chevallard distingue deux objectifs pour ce moment. Ce moment vise d'abord à « examiner ce que vaut ce qui a été appris », à travers l'évaluation des rapports personnels construits au savoir visé, et de la maîtrise de telle technique ou des éléments technologico-théoriques associés : c'est la fonction sommative de l'évaluation qui est visé. C'est un moment de véridiction (Chevallard 1989a). En second lieu, ce moment permet aussi d'interroger les praxéologies développées en termes de puissance, robustesse de technique (Chevallard 1998). Dans une conférence de 2004, Chevallard remet en question les pratiques dominantes de correction de l'enseignement français qui visent essentiellement à corriger des « mauvaises manières de faire » et à rentrer dans des logiques de remédiation (Chevallard 2004). Au contraire, l'évaluation doit être associée à l'analyse des réponses à des types de tâches, évaluation des techniques et technologies associées. Chevallard donne ainsi un autre rôle à l'erreur :

> « *On regardera l'erreur d'abord comme un symptôme de l'effort pour créer une technique (ou la technologie qui doit l'accompagner), mais d'un effort qui, jusqu'ici, n'a pas abouti, chemin d'errance qui n'a, jusqu'à présent, conduit nulle part. Que faire de l'erreur, de l'errance ? Il faut là suspendre son jugement, et revenir au labeur d'observation, d'analyse, de développement ! Dans le cadre du projet collectif où s'inscrivent les « œuvres » des élèves, on se demandera ainsi comment la tentative inaboutie aurait pu aboutir (ce qui exigera souvent de se demander pourquoi elle n'a pas abouti, sur quoi elle a buté).* » (Chevallard 2004, p.6).

Il s'agit d'amener les élèves à analyser les techniques, à les évaluer pour mettre en évidence les conditions et les limites de l'application d'une technique relativement aux tâches de type *T*. N'est-ce pas un temps pour la fonction formative de l'évaluation donnant toute sa place au savoir mathématique ?

Même si ce modèle semble actuellement difficile à appliquer pour prendre en compte les dynamiques évaluation / régulation ou évaluation / institutionnalisation (Coppé et Grugeon-Allys, 2015), nous pensons qu'un moyen d'intégrer les problématiques évaluative et didactique au service des apprentissages est de spécifier davantage les différentes fonctions de l'évaluation en lien avec la temporalité des processus d'enseignement / apprentissage et les moments didactiques. Dans les moments de première rencontre d'un nouveau savoir ou de reprise de savoir ancien, en début de séquence, le professeur peut organiser une évaluation diagnostique des praxéologies apprises. L'analyse des réponses en termes praxéologique donne des informations essentielles sur la construction du bloc technologico-théorique et l'hétérogénéité des praxéologies apprises des élèves au sein d'une classe. Préalablement à l'organisation d'une évaluation sommative, souvent bien trop précoce, le professeur peut organiser l'analyse des techniques et technologies en cours de construction mobilisées pour résoudre des types de tâches avec les élèves, lors d'épisodes de travail de la technique des praxéologies mathématiques enseignées, pour favoriser le développement d'une posture réflexive des élèves. C'est la fonction formative de l'évaluation qui trouve ainsi sa place dans des moments du travail de la technique ou de début de séance. La fonction sommative de l'évaluation reste dévolue à une ou deux étapes de la séquence, plutôt en fin de séquence, pour vérifier les praxéologies apprises. Les critères pour définir les différentes évaluations prennent en compte des praxéologies épistémologiques de référence associées aux domaines mathématiques des programmes.

---

[8] « Le *sixième moment* est celui de l'évaluation, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation (dont il est à certains égards un sous-moment) : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. » (Chevallard 1998)

Evaluation et dialectique de validation (local)

Comment articuler évaluation et didactique pour penser la dynamique du processus d'enseignement / apprentissage au niveau local en lien avec la gestion didactique en classe ? Bodin parle de *« la part de l'évaluation qui est intégrée aux situations d'apprentissage, qui joue un rôle positif dans les apprentissages, se trouve totalement intégrée au contrat didactique et ne peut plus être pensée de façon indépendante de la didactique »* (Bodin 1997 p.62-63).

La prise en compte des processus d'évaluation interroge dans le cadre de la TSD (Brousseau 1986) le partage des responsabilités entre professeur et élèves au cours de la formulation puis la validation des procédures, en particulier dans les phases d'action (recherche) et dans les phases de travail en groupe puis de mise en commun.

Nous reprenons le point de vue développé par Bodin :

> *Toujours en mathématiques, une partie au moins de l'évaluation (telle que nous l'avons définie) est strictement interne. La nécessité de vérifier les résultats obtenus et celle de se prononcer sur la valeur des procédures utilisées, font partie de l'activité normale du mathématicien comme de l'utilisateur des mathématiques. Ces nécessités doivent donc s'inscrire dans la définition des compétences du domaine mathématique et donc dans les tâches proposées aux élèves. Cet aspect de la question a été largement développé et utilisé par Guy Brousseau (1986) sous le nom de dialectique de la validation, et a été repris de façon particulièrement éclairante par Margolinas (1993).* (Bodin, 1997 p.63)

La question de la vérification des résultats, de la prise de décision sur les valeurs des procédures est au cœur de l'évaluation formative, définie comme le développement de processus formels et informels de prise d'informations que les enseignants (resp. les élèves) utilisent pendant un processus d'enseignement pour prendre des décisions, à différents moments de l'étude, permettant d'adapter leur enseignement (resp. leurs stratégies) dans le but d'améliorer l'apprentissage (Black et William 1998 ; Shavelson 2008). Ici, la prise d'informations doit concerner des processus mathématiques, les techniques et technologies mises en jeu. Le professeur joue un rôle essentiel dans la mise en place d'un milieu de validation et d'interactions pour amener les élèves construire un rapport à la rationalité mathématique idoine, pour développer une dynamique évaluation – prise d'informations / régulation - gestion d'interaction appuyés sur des éléments mathématiques.

Nous faisons l'hypothèse que ces conditions permettent de développer un contrat didactique au service des apprentissages, de l'évolution des techniques, des éléments technologiques et théoriques (discours et raisonnements).

LE DIAGNOSTIC AUTOMATISÉ *PÉPITE* EN ALGEBRE ÉLÉMENTAIRE, FIN DE LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE

Nous illustrons les éléments théoriques développés dans les paragraphes précédents pour étudier les fondements théoriques de l'évaluation diagnostique automatisée *Pépite* développée sur le domaine algébrique pour l'enseignement secondaire en France, étudier sa validité et ses usages en lien avec les autres fonctions de l'évaluation au cours du processus d'enseignement du calcul littéral en fin de scolarité obligatoire.

Praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique

A l'entrée en 3^{e} ou en 2nde, les élèves ont travaillé et appris des savoirs numériques et algébriques à différents niveaux scolaires, de l'école élémentaire au collège, en particulier en classes de 5^{e} et de 4^{e}, voire 3^{e}. Les organisations mathématiques apprises des élèves, sur le numérique et l'algébrique, sont assujetties aux différentes étapes du processus de transposition didactique, en particulier aux programmes et aux enseignements reçus dans ces classes. Nous fondons le processus d'évaluation en articulation avec celui de l'enseignement du calcul algébrique sur une organisation mathématique épistémologique de référence du domaine algébrique (Pilet, 2012 pour une organisation mathématique de référence relative aux expressions algébriques). Cette approche permet de définir un échantillon d'un ensemble de types de tâches constitutifs du domaine algébrique, évalués à chaque niveau scolaire. Nous étudions avec quelle technique, avec quels savoirs algébriques et quel discours justificatif, un élève résout une tâche d'un des types de tâches visés. Nous proposons une praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique à partir d'une synthèse des travaux en didactique de l'algèbre (Chevallard 1985, 1989 ; Kieran 2007, Pressiat et al. 2012). Elle est structurée à partir des praxéologies de *calcul* relatives aux expressions algébriques et aux formules (*calculer*, *substituer*, *reconnaître, développer*, *factoriser*) et aux équations (*reconnaître, résoudre une équation*) et des praxéologies d'*usage de l'outil algébrique,* praxéologies pour *généraliser, modéliser, mettre en équation, traduire, prouver*. La praxéologie de référence caractérise les propriétés idoines pour un calcul « intelligent et contrôlé » s'appuyant sur la prise en compte des aspects procédural et structural des objets algébriques, de l'équivalence des expressions algébriques, des équations, de la dialectique numérique / algébrique, les discours et modes de raisonnement associés ainsi que les modes de représentation dans les registres de représentation sémiotique du domaine et leur mise en relation. Ci-dessous (Tableau 1), nous présentons les principales praxéologies ponctuelles travaillées selon les niveaux scolaires et les éléments technologico-théoriques visés en tenant compte de la praxéologie épistémologique de référence.

	5^e	4^e	3^e
Du côté *objet*			
T_{calculer} Θpo[9]	D(+,-, ×, div), Q^+ (+,-) Egalité : équivalence, écriture en ligne et priorité opératoire Distributivité simple	Q (+,-, ×, div) Egalité : équivalence, écriture en ligne et priorité opératoire Distributivité double	Q (+,-, ×, div) Egalité : équivalence, écriture en ligne et priorité opératoire Identités Remarquables
$T_{\text{substituer}}$ $\Theta da/n$ $T_{\text{tester une égalité}}$	Dialectique alg. /numérique		
$T_{\text{développer}}$ $T_{\text{factoriser}}$ Θdis, Θps	Distributivité simple Equivalence des expressions, Procédural, structural	Distributivité simple, double Equivalence des expressions, Procédural, structural	Distributivité double, identités remarquables, équivalence des expressions, Procédural, structural
$T_{\text{résoudre}}$ Θeq,		Equation type $ax+b = cx+d$, a, c non nuls Conservation de l'égalité	Equation type $ax+b = cx+d$ Conservation de l'égalité Equation-produit, propriété d'un produit nul
Du côté *outil*			
$T_{\text{généraliser}}$	Variable, expression algébrique	Variable, expression algébrique, Plus complexe produit	Variable, expression algébrique, Plus complexe, id. rem.
$T_{\text{modéliser}}$ Θm T_{Produire} $T_{\text{traduire R1/ R2}}$ $\Theta tR1R2$	Variable, formule	Variable, formule Plus complexe Expressions non congruentes	Variable, formule Plus complexe Expressions non congruentes
$T_{\text{Mettre en équation}}$		Inconnue, équation 1er degré	Inéquation1er degré, Equation-produit
T_{prouver} Θp	Contre-exemple	Contre-exemple Preuve algébrique Agrégation avec T du côté *outil* et *objet*	Contre-exemple Preuve algébrique Agrégation avec T du côté *outil* et *objet*

Tableau 1 : Praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique

Les éléments technologico-théoriques relatifs aux praxéologies locales de *calcul algébrique* et d'*usage de l'outil algébrique*, les agrégations des praxéologies ponctuelles en ces praxéologies locales vont être progressivement construits lors de la résolution des tâches des différents types, au cours des différentes étapes de l'enseignement au collège. Les études en didactique de l'algèbre ont mis en évidence des ruptures d'ordre épistémologique potentielles entre l'arithmétique et l'algébrique (Vergnaud, Cortès et Favre-Artigue, 1987) et des praxéologies apprises non idoines laissant vivre des technologies anciennes (Abou Raad et Mercier 2009) qui peuvent être renforcées par des aspects épistémologiques implicites ou absents dans des praxéologies à enseigner en particulier, la dialectique entre le numérique et l'algébrique pour développer les praxéologies de généralisation, de modélisation et de preuve, en particulier le contre-exemple pour invalider la production d'expressions ou des transformations erronées ; l'aspect structural d'une expression pour sélectionner les propriétés pour développer ou

[9] *Θpo :* Ecriture en ligne (aspect structural du calcul numérique, priorité opératoire, = équivalence) ; Θpc : Propriétés relatives à l'anneau des polynômes, en particulier, propriété de distributivité (simple ou double) de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables *; $\Theta da/n$:* Dialectique algébrique / numérique ; *Θeq* : Propriétés relatives aux équations *; Θps :* Pise en compte des aspects procédural / structural des objets *; Θm :* modélisation ; *$\Theta tR1R2$* : Propriétés relatives aux règles de conversion entre deux registres de représentation sémiotique mis en jeu dans le domaine algébrique, les règles de formation et de transformation *; Θp :* Eléments théoriques et théoriques fondant la preuve algébrique.

transformer des expressions, l'équivalence des expressions.

Evaluation diagnostique Pépite

Le modèle didactique

Pour caractériser les praxéologies apprises des élèves en algèbre, à l'entrée en 5^e, 4^e, 3^e ou 2nde, nous avons défini une évaluation diagnostique *Pépite*. La praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique fonde la conception du dispositif d'évaluation diagnostique *Pépite* tant en ce qui concerne la représentativité de l'échantillon des types de tâches constitutifs du test, l'analyse et le codage des réponses que l'interprétation des résultats et leur exploitation dans l'organisation didactique de l'enseignement.
Nous présentons d'abord le test diagnostique puis les choix pour l'analyse des réponses, l'interprétation des résultats de l'évaluation. Nous illustrerons sur des exemples, l'exploitation des résultats de l'évaluation et mettrons en relation les processus didactiques à différents niveaux d'échelle et les fonctions de l'évaluation.

- *La conception du test diagnostique*

Les dix tâches diagnostiques[10] du test *Pépite* en 3^e recouvrent le domaine algébrique et se répartissent selon quatre types de tâches : (1) les tâches de calcul (*développer* et *factoriser* des expressions algébriques, *résoudre* des équations), (2) les tâches de *production* (d'expressions, de formules, d'équations), (3) les tâches de *traduction* ou de *reconnaissance* (de relations mathématiques), (4) les tâches de résolution de problèmes pour généraliser, pour *prouver* des propriétés, pour *modéliser* ou pour *mettre en équation*. Les items sont soit des QCM, soit des questions ouvertes à réponse courte ou longue. Des exemples de tâches sont présentés en annexe 1 (Figures 1, 2, 3.1, 3.2, 3.3 et 4). Ces tâches sont représentatives du domaine algébrique et l'ensemble des tâches recouvre ce domaine, conditions pour une évaluation valide d'un point de vue épistémologique. Chaque tâche diagnostique est caractérisée par les variables didactiques suivantes - type de tâche, caractéristiques des objets algébriques, cadres et registres de représentation en jeu, niveau de mise en fonctionnement des connaissances – Ce modèle didactique des tâches diagnostiques permet d'adapter le test aux niveaux scolaires de la 5^e à la 2nde (Chenevotot-Quentin, Grugeon-Allys, Pilet et Delozanne, accepté). L'analyse praxéologique *a priori* des exercices permet de caractériser les valeurs des variables didactiques et leur pertinence pour déterminer des tâches représentatives des types de tâches du domaine algébrique, à un niveau scolaire donné, et les niveaux technologiques et théoriques visés par les techniques. Il en est de même pour les distracteurs des QCM qui sont sélectionnés pour recueillir des techniques et des erreurs envisageables. Le logiciel PépiGen (Prévit 2008) génère automatiquement les tâches, les réponses anticipées et leur codage.

- *L'analyse des réponses*

L'étude épistémologique a permis de déterminer les éléments technologico-théoriques visés pour les praxéologies de *modélisation*, de *preuve*, de *traduction* et de *calcul* (cf. Tableau 1). L'étude des erreurs récurrentes permet de déterminer des technologies mobilisées non idoines qui laissent vivre des techniques en dehors de leur domaine de validité. Pour les praxéologies de *calcul*, comme *développer*, les erreurs de concaténation de type $a+b \rightarrow ab$ mobilisent les techniques basées sur l'évaluation de calculs, mobilisées en arithmétique sur des nombres, invalides dans le domaine algébrique.
Le test automatisé *Pépite* comprend trois niveaux pour l'analyse des réponses des élèves :

- Le diagnostic local analyse la réponse de l'élève pour chaque item. Le codage des réponses

[10] Une tâche peut être subdivisée en items.

envisageables, c'est-à-dire, des techniques et/ou erreurs selon la technologie mobilisée, s'appuie sur l'étude épistémologique et porte sur la validité (V) - correcte ou non -, et sur les technologies mises en jeu dans les praxéologies de *calcul* (EN, EA), les praxéologies de *preuve* (J), les praxéologies de *modélisation* et *traduction* (T) (Grugeon, 1997). Les codes EA1, EA2, EA3, EA4 représentent des technologies différentes, respectivement, la technologie algébrique idoine fondée sur un calcul intelligent et contrôlé (équivalence des expressions, aspect structural et procédural des expressions, dialectique numérique / algébrique, justification par les propriétés algébriques) (EA1), une technologie idoine « moins efficace » (EA2), une technologie algébrique faible sans appui sur les aspects sémantiques (EA3), la technologie arithmétique (EA4).

- Le diagnostic global individuel permet le calcul du profil de l'élève à partir d'une étude transversale des codes issus de l'analyse des réponses aux différentes tâches diagnostiques.
- Le diagnostic global collectif positionne l'élève par rapport à des groupes d'élèves qui ont des profils praxéologiques proches ; le système de diagnostic affecte automatiquement l'élève dans un groupe dont il précise les caractéristiques sur trois composantes : *usage de l'algèbre* pour résoudre les problèmes du domaine et *niveau de rationalité, habileté et intelligence technique* en calcul algébrique, *flexibilité dans la traduction entre différents registres sémiotiques* (Annexe 2 – Figure 6). Une échelle avec différents niveaux définis à partir de critères qualitatifs pour chaque niveau, permet de situer l'élève sur chaque composante (Delozanne et al. 2010).

- *L'analyse a priori des tâches*

Nous illustrons l'analyse *a priori* pour la tâche diagnostique *preuve et programme de calcul*, correspondant à une praxéologie de généralisation et de preuve. L'énoncé de la tâche est formulé ainsi : *Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu prends un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre. Tu trouves 7. »*
Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.

Deux techniques sont envisageables en lien avec la convocation des praxéologies de *généralisation* et de *preuve* : une technique arithmétique fondée sur la technologie arithmétique (preuve par l'exemple – J2), une technique algébrique fondée sur la technologie algébrique (preuve algébrique – J1), une technique algébrique non idoine (J3).

Dans les deux cas, la convocation ou non de la praxéologie de traduction peut provoquer des écritures erronées qui mobilisent des techniques en dehors de leur domaine de validité (EN3, T451 ou EA42, T422), ou des techniques relevant de la technologie arithmétique (aspect procédural privilégié (EN2 ou EA2, égalité comme annonce de résultat (E2), ou des techniques erronées relevant de la technologie pré algébrique (aspect structural privilégié pour le résultat, mais règles incorrectes (EN3, T351 ou EA3, T322), ou bien une écriture en ligne parenthésée pour décrire les priorités opératoires et du calcul littéral corrects (EA1, T122).

Solutions	**Types d'écriture**	**Technologie**	**Codage**
pour le nombre 1, (1+8)3 = 27-4 = 23+1= 24/4 = 6+ 2 = 8-1= 7	Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis à vis de l'égalité	Arithmétique	V3, EN3, J2, T451, E3
pour le nombre 1, 1+8 = 9 ; 9×3 = 27 ; 27-4 = 23 ; 23+1 = 24 ; 24/4 = 6 ; 6+2 = 8 ; 8-1 = 7.	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations	Arithmétique	V3, EN2, J2, T251, E2
Pour le nombre 36 *36* + 8 × 3 - 4 + *36* / 4 + 2 - 36 = 7	Écriture linéaire globale non parenthésée avec mémoire[11]	Arithmétique	V3, EN3, J2, T351, Ex
Pour le nombre 3, 3 + 8 × 3 - 4 + 3 / 4 + 2 - 3 = 22,75	Écriture linéaire globale non parenthésée sans mémoire	Arithmétique	V3, EN3, J2, T351, E2
Pour le nombre 3 ((3 + 8)× 3 - 4 + 3)/ 4 + 2 - 3 =7	Écriture linéaire globale parenthésée	Arithmétique Pré algébrique	V3, EN1, J2, T151, E1

Tableau 2 : Analyse a priori – démarche arithmétique

Solutions	**Types d'écriture**	**Technologie**	**Codage**
B= nombre pensé, S somme 1ère, S' somme 2nde, etc.(B + 8) × 3 = S - 4 = S' + B = S² /4 = S^3 + 2 = S^4-B = 7 tous les *S* / S^1 / S^2 / S^3 / S^4 représentent les sommes trouvées après chaque opération.	Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis à vis de l'égalité	Arithmétique Preuve	V3, EA1, J3, T422, E3
(x+8)3 = 3x+24 = 27x ; 27x-4 = 23x ; 23x+x = 24x ; 24x/4 = 6x ; 6x+2=8x ; 8x-x=7. Son traitement formel s'appuie sur *des règles de transformation incorrectes* qui s'avéreront résistantes	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations - système sans parenthèse - règle d'assemblage {a+b ---> *ab*} - règle de désassemblage avec l'addition {*ab* ---> *a*+*b*}	Arithmétique	V3, EA42, J3, T422, E3
x nombre quelconque (x+8)3 = 3x+24 ; 3x+24 -4 = 3x+20 ; 3x+20+x = 4x + 20 ; (4x + 20)/4 = x+5 ; x+5+2=x + 7 ; x + 7-x=7	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations	Preuve Aspect procédural Calcul	V2, EA2, J1, T122, E2
sans mémoire : x + 8 × 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7x + x - x = 8 × 3 - 4 / 4 + 2 2x - x = 24 - 1 + 2 x= 25	Écriture linéaire globale non parenthésée sans mémoire et résolution d'équation	Arithmétique	V3, EA31, J3, T322, E3
((x + 8) × 3 - 4 + x) / 4 + 2 – x (3x +24 – 4 + x) / 4 + 2 – x 4 (x+5)/4 +2 – x x+5 + 2 – x = 7	Écriture linéaire globale parenthésée	Algébrique	V1, EA1, J1, T122, E1

Tableau 2 : Analyse a priori – démarche algébrique

- *Des cohérences de fonctionnement – des blocs technologico-théoriques dominants*

Comment exploiter l'analyse praxéologique sur l'ensemble des tâches du test diagnostique pour une description des cohérences de fonctionnement des élèves exploitable par l'enseignant pour réguler son enseignement ? Les catégories utilisées par les enseignants « les bons, les moyens, les mauvais » sont peu exploitables. La définition de codages fondés sur les blocs technologico-théoriques permet une analyse transversale sur l'ensemble des tâches de l'évaluation. Ce choix

[11] L'élève garde en mémoire le sens de l'enchaînement opératoire et l'effectue correctement à l'aide d'un calcul mental.

permet de repérer des technologies dominantes mobilisées par les élèves et de les grouper par technologie proche. Nous avons fait le choix de présenter le bilan personnel de l'élève sur trois composantes, *calcul algébrique*, *outil algébrique*, *traduction algébrique*, ces deux dernières pouvant être regroupés. Chaque niveau correspond à une technologie dominante pour le bloc technologico-théorique. Nous avons pris garde de ne pas utiliser un vocabulaire trop complexe, ni un niveau de description trop fin.
Nous utilisons ces termes sur la plateforme en ligne *LaboMep*, ces termes étant en cohérence avec le contexte institutionnel (terminologie utilisée dans les programmes et le socle commun de compétences). Ils ont été discutés avec les enseignants, les chercheurs, les membres de Sésamath. Plusieurs niveaux de description sont donc proposés : bilan de l'élève, bilan de la classe par groupes, analyse des réponses des élèves avec un accès aux réponses de l'élève dans un tableur (Grugeon-Allys, Chenevotot et Delozanne, 2013 ; Pilet 2012).
En bilan, ces choix théorique et méthodologique fondent la validité épistémo-didactique de *Pépite*. En revanche, les critères de niveau de langue, de formulation ont été pris en compte, mais certainement pas suffisamment travaillés pour avoir un gage total de validité psycho-didactique.

Le modèle informatique

Le modèle didactique permet la génération des tâches diagnostiques génériques, adaptables selon le niveau scolaire. Le logiciel *Pépidiag* (Delozanne et al. 2010) permet de générer automatiquement des clones de chaque tâche et leur grille d'analyse. Le logiciel *Pépinière* (Prévit 2008) permet de générer les réponses anticipées, d'analyser automatiquement les réponses des élèves à partir du calculateur algébrique, et de fiabiliser l'analyse des réponses aux questions ouvertes, y compris sur certains raisonnements algébriques.
Le logiciel *Pépidiag*, à partir du modèle de profil de l'élève, produit le bilan personnel de l'élève en situant l'activité algébrique de l'élève sur chaque composante et le bilan de la classe en groupes de bilans personnels proches (Grugeon-Allys et Chenevotot 2013 ; Pilet 2012). Tout enseignant de 3^{e} ou de 2nde, travaillant sur *LaboMep*, peut donc faire passer le test diagnostique *Pépite* aux élèves de sa classe, obtenir après l'analyse des réponses des élèves aux items, les bilans personnels des élèves et le bilan de sa classe. Nous l'illustrons pour la classe de Garance[12] avec le bilan personnel d'un des élèves de la classe et la répartition des élèves en deux groupes B et C, les élèves du groupe C ayant une activité relevant principalement de la technologie arithmétique, tant pour le *calcul* que pour son usage pour résoudre des problèmes (Annexe 2, figures 5 et 6).

Evaluation diagnostique dans d'autres domaines mathématiques

Cette méthodologie de conception est mobilisée dans deux autres contextes institutionnels. Grapin[13] définit une praxéologie épistémologique de référence dans le champ de l'arithmétique des entiers pour le cycle 3 de l'école primaire. En premier lieu, elle mobilise cette référence pour analyser la validité didactique de l'évaluation CEDRE CM2, pour le domaine calcul numérique. Deuxièmement, elle interprète les résultats de l'évaluation au filtre de la praxéologie de référence associée à l'arithmétique des entiers pour mettre en évidence des praxéologies implicites ou des besoins d'apprentissage ignorés dans les programmes ou des pratiques enseignantes autour de la numération et du calcul réfléchi non idoines, afin de proposer des pistes pour réguler l'enseignement, tant au niveau des praxéologies à enseigner qu'enseignées.

[12] Garance est une enseignante du groupe IREM qui a travaillé avec les chercheurs pendant deux années.
[13] Grapin soutient sa thèse en décembre 2015.

Le deuxième contexte concerne la formation des futurs professeurs des écoles en M1 du master MEEF premier degré, à l'ESPE de Créteil, dans le cadre du projet ORPPELA[14], depuis la rentrée universitaire 2013. Ce projet vise à gérer la très grande hétérogénéité des rapports personnels des étudiants aux mathématiques, c'est-à-dire, des praxéologies apprises pour différents domaines mathématiques (numérique, algébrique, géométrie, fonctionnel) en fin de scolarité obligatoire. L'enjeu est de permettre à des publics changeant d'orientation (titulaires de licences professionnelles, autres cursus non universitaires, emploi d'avenir professeur, etc.) de réussir leur formation en M1et de faire évoluer leur rapport aux mathématiques.
Nous avons conçu et mis en place un dispositif de formation s'appuyant sur une évaluation diagnostique automatisée (Grugeon 1997) à l'entrée en M1 dans les quatre domaines mathématiques cités, et des stratégies de formation adaptées aux besoins d'apprentissage repérés des étudiants. La démarche reprend dans les grandes lignes la méthodologie présentée plus haut. Le travail théorique est en cours. Les résultats de ce projet sont présentés dans (Grugeon-Allys et Pilet, à paraître).

REGULATION DE L'ENSEIGNEMENT

Réguler par des parcours d'enseignement (global)

Nous faisons l'hypothèse qu'un moyen d'accompagner un enseignant à réguler son enseignement est d'abord de dégager des enjeux didactiques « prioritaires » à partir d'une étude épistémologique du savoir à enseigner pour lui permettre d'organiser la reprise de savoirs anciens pour un domaine mathématique, à un niveau scolaire donné. En deuxième lieu, il s'agit de proposer des ressources permettant à un enseignant de réguler son enseignement en mettant en relation, d'une part, les résultats de l'évaluation diagnostique et les besoins d'apprentissage des groupes d'élèves de sa classe, et d'autre part, les besoins d'apprentissage ignorés dans les programmes, les praxéologies mathématiques peu présentes dans son enseignement ou ne favorisant pas le travail de certaines techniques et technologies.

Les Parcours d'Enseignements Différenciés (Pilet 2012)

Pilet (2012) a défini des parcours d'enseignement différencié (PED) relativement aux expressions algébriques pour gérer l'hétérogénéité des praxéologies apprises des élèves. Pilet a dégagé des aspects épistémologiques des objets anciens de l'algèbre élémentaire, ici les expressions algébriques, à faire travailler aux élèves pour permettre la construction de raisons d'être et poursuivre la construction du bloc technologico-théorique : la signification des expressions, en lien avec les praxéologies de généralisation, de preuve, la dialectique numérique / algébrique, l'équivalence des expressions algébriques, les aspects procédural et structural des expressions, l'interprétation des écritures algébriques en lien avec d'autres représentations sémiotiques mobilisés dans le cadre algébrique.
Pilet (2012) a ainsi construit des ressources de régulation dans le domaine algébrique, dans le but de permettre aux enseignants d'organiser la reprise de savoirs anciens, les expressions algébriques, au sein de leur progression habituelle. Pour un enjeu didactique donné commun à la classe, les situations ou exercices différenciés proposés, adaptés aux besoins d'apprentissage

[14] Réalisé dans le cadre des Initiatives d'Excellence en Formations innovantes (IDEFI) du Programme Investissements d'Avenir, Université Paris-Est met en œuvre le dispositif IDEA. http://espe.u-pec.fr/l-espe/innovation-pedagogique/projet-orppela-organiser-une-progressivite-des-parcours-de-formation-des-etudiants-en-master-metiers-de-l-education-et-de-la-formation-et-leur-accompagnement-682061.kjsp?RH=1412862302533

des différents groupes, visent soit, à développer des raisons d'être d'un objet, soit à remettre en question des conceptions erronées, soit à poursuivre la construction du bloc technologico-théorique, soit à organiser l'agrégation de praxéologies ponctuelles via la résolution de tâches assez complexes montrant la nécessité de convoquer des types de tâches implicites pour leur résolution. Un ensemble de variables didactiques permettent d'adapter les situations aux différents groupes de la classe : le type de tâche, la nature et complexité des expressions algébriques, les registres de représentation sémiotique mis en jeu, le découpage de l'énoncé à travers le nombre de types de tâches à convoquer, les aides en fonction des besoins d'apprentissage des élèves.

Exemple de parcours (Pilet 2012)

Nous illustrons la démarche réalisée dans la classe de troisième (21 élèves) de Garance en 2011-2012, enseignante du groupe IREM « Différenciation des pratiques d'enseignement en calcul littéral ». Garance organise l'évaluation diagnostique *Pépite* en début de progression pour réaliser le bilan de sa classe en algèbre. Quinze élèves convoquent une technologie arithmétique dans la praxéologie locale de *calcul* et les praxéologies *d'usage de l'outil algébrique*. Six élèves convoquent de façon dominante une technologie algébrique faible pour la praxéologie locale de *calcul*, mais ne convoquent pas l'outil algébrique pour résoudre les problèmes du domaine algébrique.
Elle introduit trois parcours enseignement différenciés dans des moments de reprise pour :

- Amener les élèves à donner des raisons d'être aux expressions algébriques en lien les praxéologies de *généralisation*, de *preuve* (produire des programmes de calcul pour dénombrer et déterminer leur équivalence – PED1) afin de poursuivre la construction du bloc technologico-théorique autour de la propriété de distributivité et du contre-exemple ; l'activité visée doit favoriser l'agrégation des praxéologies de *production*, de *preuve* et de *substitution* ;
- Amener les élèves à reconnaître si des expressions sont équivalentes (PED2 et PED3) afin de reconnaître leur structure, de développer la dialectique algébrique / numérique et de prouver leur équivalence ou non en convoquant les praxéologies de *calcul* (*développer, factoriser*) ou la praxéologie de *substitution*.

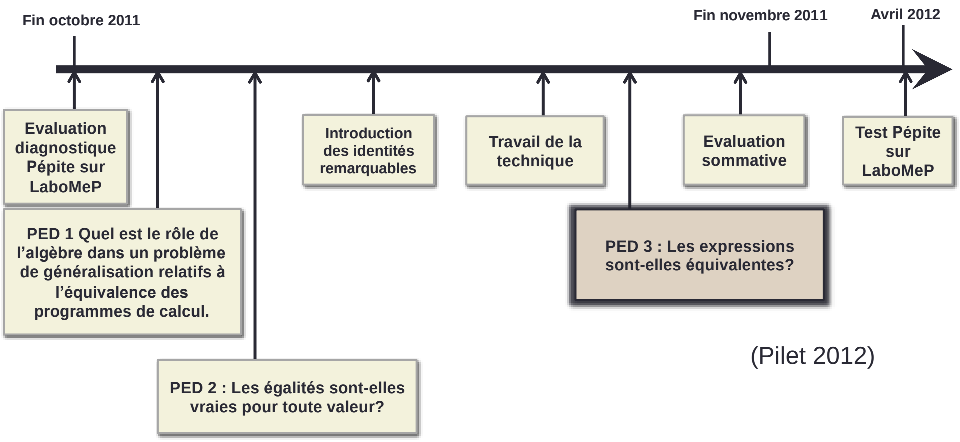


Figure 7 : Processus d'enseignement de Garance en calcul algébrique

Les élèves résolvent des situations différentes en fonction des valeurs attribuées aux variables didactiques les caractérisant (cf. .1.1). Par exemple, pour le PED1, les situations diffèrent par les patterns en jeu (Figure 8) dont ils doivent dénombrer les carrés unités. Le calcul conduit soit à des expressions du premier degré, soit à des expressions du second degré (Pilet 2012) pour trouver le résultat des programmes de calcul.

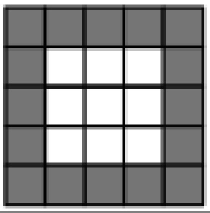
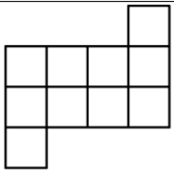
Pattern 1		Pattern 2	
	$4x + 4$ $4(x+1)$ $2x + 2(x+2)$ $4(x+2) - 4$		$(a+2)^2 - 2(a+1)$ $a^2 + 2(a + 1)$ $a(a+2) + 2$ $a^2 + 2a + 2$

Figure 8 : les patterns selon les deux groupes d'élèves

Gestion didactique et évaluation

Une étude didactique de ce PED permet de définir et de mettre en place des conditions pour engager le processus de dévolution chez les élèves, proposer des aides constructives pour développer les processus de formulation des programmes de calcul en fonction de schémas puis leur traduction d'abord en expressions numériques puis algébriques. L'enjeu est aussi de faciliter la production d'un milieu de validation puis de preuve pour évaluer les expressions algébriques produites dans le cadre algébrique, en mobilisant la technologie substitution pour invalider via un contre-exemple ou la technologie *distributivité* pour prouver l'équivalence de deux expressions. L'enjeu est de développer un contrat didactique au service des apprentissages, de l'évolution des techniques, des éléments technologiques et théoriques (discours et raisonnements), laissant une place à l'évaluation formative.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons montré certaines pistes pour développer l'articulation entre les problématiques évaluative et didactique.
Le champ de la recherche en didactique des mathématiques apporte d'abord les outils de l'analyse *a priori* didactique et praxéologique pour concevoir des évaluations valides dans ses aspects épistémo-didactique et psycho-didactique. En complémentarité, l'approche psychométrique interne au champ de l'évaluation met à disposition les outils statistiques pour étudier la validité psychométrique et la fidélité d'une évaluation. En retour, la didactique permet d'interroger les résultats de dispositifs d'évaluation au regard des programmes d'enseignement et des pratiques d'enseignement. Au cœur de l'approche didactique, la caractérisation d'organisations praxéologiques de référence associées aux domaines mathématiques impliqués joue un rôle majeur (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015).
Les phénomènes d'évaluation ont longtemps été un point aveugle de la didactique (Chevallard et Feldmann 1986 ; Bodin 1997). Nous avons montré qu'il est possible de faire des liens entre les concepts développés dans le champ de l'évaluation et les théories didactiques pour aborder la dynamique évaluation / régulation. Dans le cadre de la TAD, à un niveau global, l'articulation entre moments didactiques (plus particulièrement des épisodes) et rôles de l'évaluation permet à l'enseignant de gérer l'avancée du temps didactique en s'appuyant sur des informations obtenues au cours d'évaluations soit diagnostique (moment de reprise) pour repérer les praxéologies apprises et les praxéologies à travailler au regard des programmes, soit formative (épisodes de travail de la technique et de la technologie), soit sommative (après plusieurs moments d'institutionnalisation pour évaluer ce que les élèves ont appris au regard des praxéologies visées). Dans le cadre de la TSD, la prise en compte des processus d'évaluation formative donne une place accrue aux enseignants pour planifier la régulation de sa progression,

en fonction des informations collectées sur les techniques et technologies développées dans la résolution des tâches par les élèves, et pour gérer les interactions dans les phases d'action, de formulation, validation et d'institutionnalisation (niveau de discours justificatif). Les fonctions de l'évaluation mobilisées donnent à voir le contrat didactique à l'œuvre dans la classe à travers la répartition des responsabilités entre élèves et professeur et le savoir mathématique enseigné. Il s'agit de poursuivre les recherches pour préciser les liens entre évaluation et processus didactique.
De nombreuses perspectives de recherche à la rencontre des cadres théoriques de la DDM et de l'évaluation sont déjà ouvertes et poursuivies dans le cadre du projet ANR Néopraéval : méthodologie de conception d'évaluations externes et internes, étude sur les pratiques d'évaluation des enseignants (Horoks et Pilet, intra 2015).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABOU RAAD, N., MERCIER, A. (2009) Mercier Étude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban, *Recherches en didactique des mathématiques* 29 (2)

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives Hors-série. Grenoble : La pensée sauvage.

BLACK P., D. WILIAM (1998), *Inside the Black Box: Raising standards through classroom assessment*. London: King's college.

BODIN A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1) 49– 96.

BODIN A. (2006). Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. *Repères IREM*, 65, 55-89.

BOSCH M., GASCON J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans Mercier A. & Margolinas C. (Dir) Balises pour la didactique des mathématiques (197 – 122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2011) *Le cas de Gaël revisité* (1999-2009). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620/fr/

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-116.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2) 135–182.

CHENEVOTOT-QUENTIN F., GRUGEON B., PILET J., DELOZANNE E. (accepté). Transfert du diagnostic *pépite* à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages par les enseignants. *Espace Mathématique Francophone EMF2015,*

CHEVALLARD Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique *Petit x* 5 51–94.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43–75.

Chevallard Y. (1989a). Evaluation, véridiction, objectivation. In J. Colomb & J. Marsenach (Eds.), *L'évaluation en révolution. Actes des Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation, Asssociation pour le développement des méthodologies en Éducation-Europe, Paris, 27-29 septembre 1989* (p. 13-36). Paris : Institut national de recherche pédagogique.

CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle, 119-140.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2) 221 – 266.

CHEVALLARD Y. & FELDMANN, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (2004) Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation. Conférence du 16 mars 2004. Formation de formateurs. IUFM d'Aix-Marseille. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=44

CHEVALLARD Y. (2007) Une épreuve expérimentale de mathématiques ? http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Une_epreuve_experimentale_de_mathematiques.pdf

DELOZANNE E., PREVIT D., GRUGEON-ALLYS B., CHENEVOTOT-QUENTIN F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence, Revue Techniques et Sciences Informatiques, 29, n°8-9 / 2010, Hermès-Lavoisier, Paris, pp. 899-938DUVAL R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3) 349–380.

GREGOIRE J., LAVEAULT D. (2014) *Introduction aux théories des tests en sciences humaines*. De Boeck : Bruxelles.

GRUGEON B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques* 17 (2) 167–210.

GRUGEON-ALLYS B., GRAPIN N. (2015) Validité d'une évaluation externe. Complémentarité des approches didactique et psychométrique. Dans A-C. Mathé et E. Mounier (Eds.) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques 2015*. Paris, France : IREM Paris 7.

GRUGEON-ALLYS B., CHENEVOTOT-QUENTIN F., DELOZANNE E. (2013). De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire. In Coppé S., Haspekian M. (Eds) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques*. Année 2013. 103-133. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00972656/document

GRUGEON-ALLYS B., PILET J., CHENEVOTOT-QUENTIN F., DELOZANNE E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives Hors-série 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

HADJI C. (1989) *L'Evaluation, règles du jeu. Des intentions aux outils*. Paris : ESF, 1989. *191*p.

JOSHUA S. (1996), Qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16(2). La pensée sauvage, Grenoble.

KIERAN C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Eds.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and

Learning, Chapter 16, pp. 707-762.

LESCURE S., PASTOR J-M. (2012) *Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences.* Paris : Scéren.

PILET J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

PREVIT D. (2008) *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes*. Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6

RAPPORT EURYDICE 2009 : *Les évaluations standardisées des élèves en Europe : objectifs, organisation et utilisation des résultats.* ISBN 978-92-9201-037-9. http://eacea.ec.europa.eu/education/Eurydice/documents/thematic_reports/109FR.pdf

REY O., FEYFANT A. (2014) Évaluer pour (mieux) faire apprendre. Dossier de veille de l'Ifé, 94.

ROCHER T. (2015) Mesure des compétences. Méthodes psychométriques utilisées dans le cadre des évaluations des élèves. *Éducation et Formations* 86/87 37–60.

SHAVELSON, R., YOUNG, D., AYALA, C., BRANDON, P., FURTAK, E. & RUIZ PRIMO, M. (2008). On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning: A Collaboration between Curriculum and Assessment Developers. *Applied Measurement in Education,* 21(4), 295-314. **http://www.tandfonline.com/toc/hame20/21/4#.VPBU9WaS2ll**

VANTOUROUT M., GOASDOUE R. (2014) Approches et validités psycho-didactique des évaluations. Éducation et Formation N°e-302. http://ute3.umh.ac.be/revues/

VERGNAUD G. (1986) : Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x*, 22, 51-69.

VERGNAUD G., Cortès A., Favre-Artigue P. (1987) : Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 259-288, Editions La Pensée Sauvage.

ANNEXE 1

- Des tâches de calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du premier degré ou se ramenant au premier degré

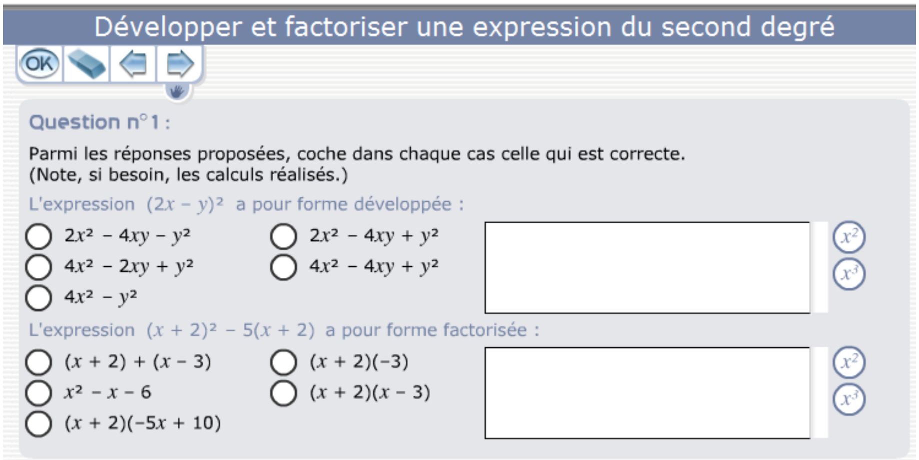


Figure 1 : « développer et factoriser une expression du second degré »

- Des tâches de production d'expression, de formule

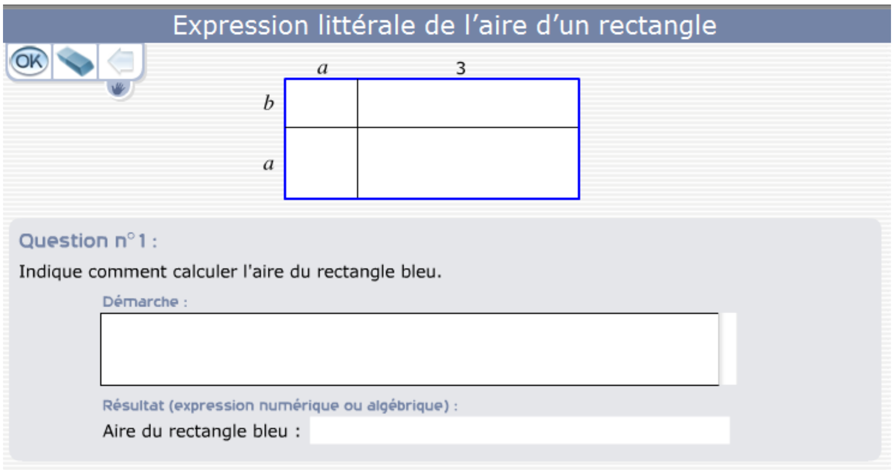


Figure 2 : « expression littérale de l'aire d'un rectangle »

- Des tâches de reconnaissance de la structure d'une expression
  Ces tâches permettent de repérer la signification attribuée à des expressions (équivalence) et le niveau de raisonnement engagé par les élèves.

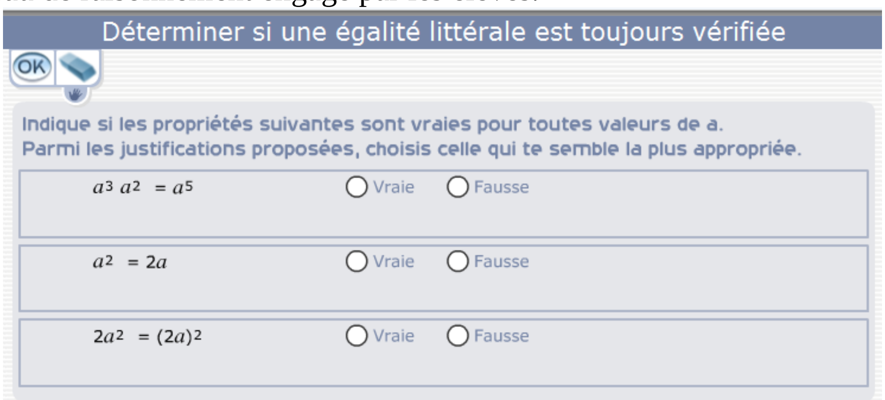


Figure 3.1 : « déterminer si une égalité est toujours vérifiée »

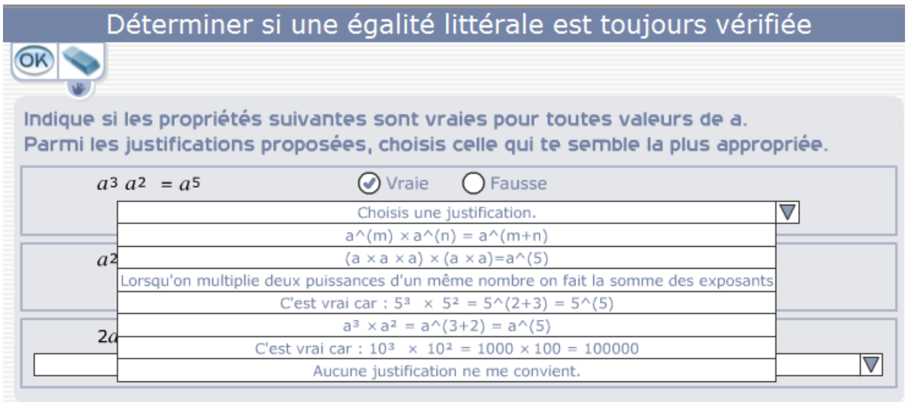


Figure 3.2 : Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Vraie »

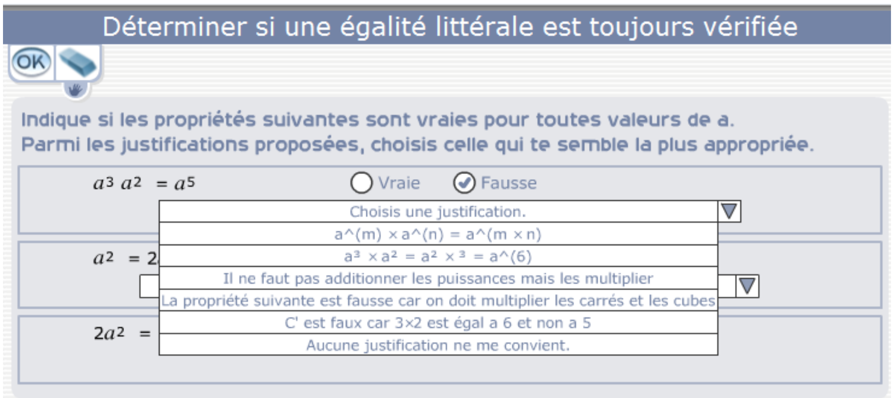


Figure 3.3 : Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « fausse »

- Des tâches pour résoudre des problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés

Les tâches de preuve permettent de tester la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour produire des expressions algébriques puis prouver une propriété

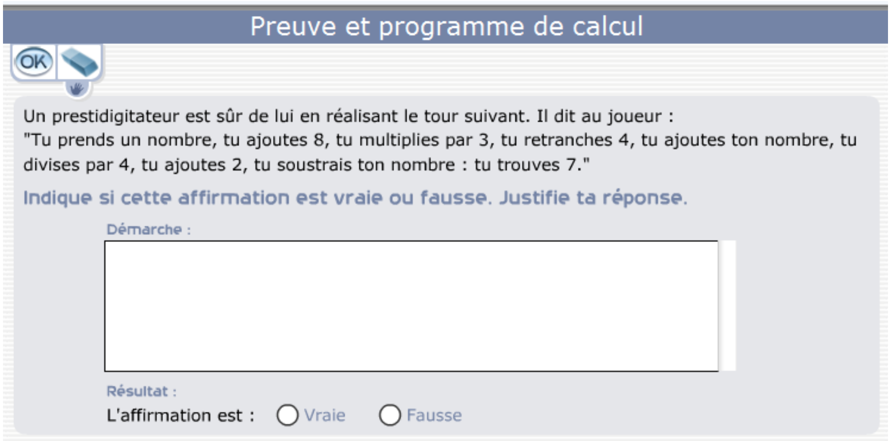


Figure 4 : « Preuve et programme de calcul »

ANNEXE 2

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	*Niveau 1* : Calcul intelligent et contrôlé
			Niveau 2 : Calcul technique basé sur des règles syntaxiques souvent à l'aveugle
			Niveau 3 : Calcul sans signification et sans priorité opératoire (arithmétique)
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	*Niveau 1* : Disponible et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Adapté dans certains types de problèmes.
			Niveau 3 : Non motivé et non compris.
			Niveau 4 : Non – Arithmétique
Traduction d'une représentation à une autre	T	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction sans appui sur la reformulation.
			Niveau 3 : Traduction pour schématiser.

Tableau 3 : Caractéristiques du bilan personnel de l'élève

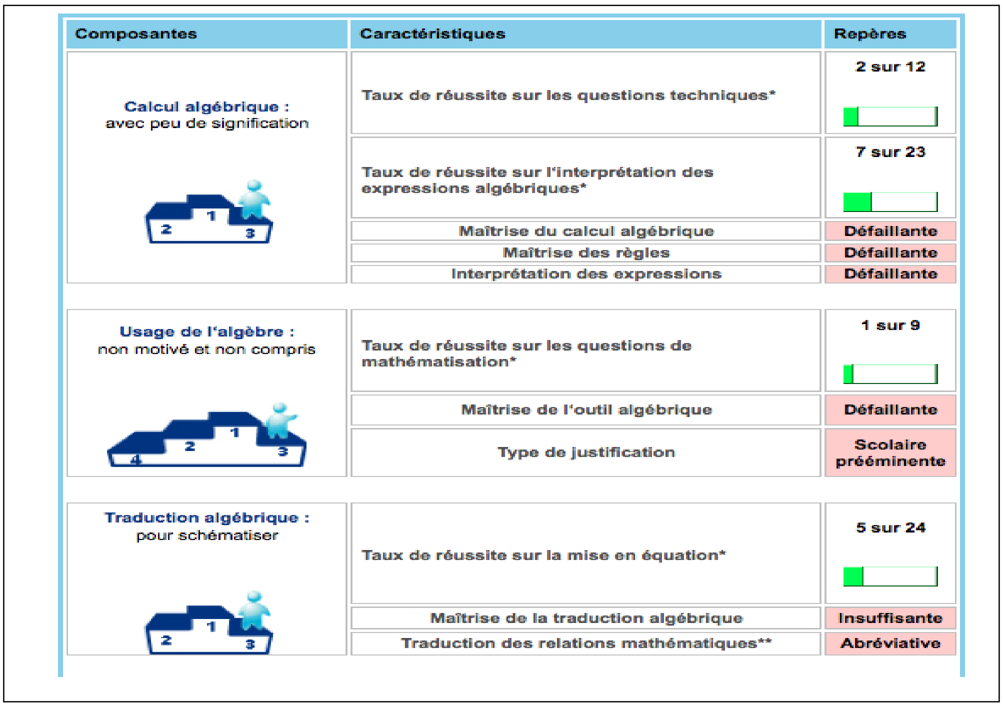


Figure 5 : bilan personnel d'un élève en algèbre élémentaire

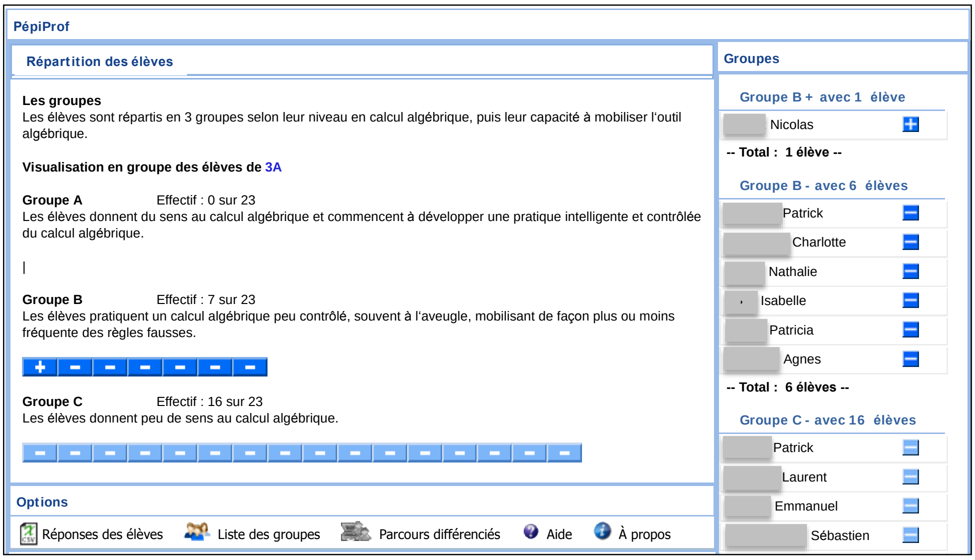


Figure 6 : bilan d'une classe en algèbre élémentaire

DES RECHERCHES AUTOUR DE « FAITS D'ÉVALUATION » EN MATHÉMATIQUES

Nathalie **SAYAC**
Université Paris Est Créteil - ESPE
Laboratoire de didactique André Revuz
nathalie.sayac@u-pec.fr
Nadine **GRAPIN**
Université Paris Est Créteil - ESPE
Laboratoire de didactique André Revuz
nadine.grapin@u-pec.fr

Résumé
Les deux recherches que nous présentons apportent deux regards complémentaires et différents sur une même évaluation externe, le bilan CEDRE fin d'école en 2008. En définissant deux facteurs de complexité et trois niveaux de compétence, nous appréhendons le contenu global de l'évaluation pour étudier la répartition des items et interroger la validité des résultats qui peuvent être produits. L'étude du premier facteur de complexité nous conduit par la suite à considérer les items d'un point de vue local et à observer les stratégies mises en œuvre par des élèves de CM2 pour répondre à des QCM : une première recherche porte principalement sur les stratégies des élèves en fonction de leur niveau de connaissance et la seconde recherche met en perspective les deux formats de question (QCM et question ouverte) pour analyser leur impact sur la réussite à l'exercice et sur les procédures mises en œuvre.

Mots clés
Évaluation, complexité, compétence, format de question, QCM.

UNE PREMIERE RECHERCHE AUTOUR D'UNE EVALUATION EXTERNE

Présentation et contexte de la recherche

Les évaluations bilan de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) menées en mathématiques à la fin de l'école et à la fin du collège ont pour objectif affiché de mesurer les connaissances et compétences des élèves à ces deux moments de leur scolarité, en lien avec les programmes en cours. Elles sont menées dans le cadre d'un cycle débuté en 2003 qui concerne d'autres disciplines que les mathématiques et qui se reproduit tous les 6 ans : ainsi, l'évaluation bilan CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon) de fin d'école menée en 2008 en mathématiques s'intègre à l'intérieur de ce cycle à des évaluations menées par exemple en maîtrise de la langue et sur des compétences générales (2003, reprise en 2009), en langues vivantes (en 2004), etc. La reproductibilité des évaluations est rendue possible tant dans leur conception que dans leur passation, notamment en ne rendant pas public les items de ces évaluations.

A la différence des évaluations nationales menées en CE1 et en CM2, les évaluations bilans ne sont pas réalisées sur tous les élèves de fin d'école primaire, mais uniquement sur un échantillon représentatif de la population des élèves français. Ainsi, environ 3800 élèves de CM2 (soit un peu plus de 200 classes concernées) ont passé ces évaluations. Par conséquent, le modèle statistique[1] utilisé pour construire les échelles de scores permet de caractériser des groupes d'élèves par les compétences qu'ils maîtrisent ; il ne s'agit en aucune façon de déterminer les compétences maîtrisées par chacun des élèves ayant participé à l'évaluation.

Pour le primaire, les items proposés en mathématiques pour CEDRE 2008 ont ainsi permis de mesurer les connaissances relevant des six domaines (connaissances des nombres entiers naturels, fractions et décimaux, calcul, exploitation de données numériques, espace et géométrie, grandeurs et mesures) et différentes compétences (identifier des notions, exécuter un calcul, traiter des données, produire en autonomie, contrôler-valider).

Chercheuses en didactique des mathématiques, nous avons été sollicitées pour participer à la conception et l'analyse des évaluations bilans en mathématiques de fin d'école pour l'une, et de fin de collège pour l'autre, menées par la DEPP de septembre 2005 à juin 2009. Il convient de préciser que nous n'avons pas été sollicitées en tant que chercheuses, mais en tant que formatrices d'enseignants en IUFM, pour compléter des équipes pluri catégorielles d'experts composées de professeurs de terrain, de conseillers pédagogiques, d'IEN (Inspecteur de l'Éducation Nationale) et d'IA-IPR (Inspecteur d'Académie - Inspecteur Pédagogique Régional).

A la suite de ce travail, il nous a semblé pertinent d'interroger le contenu de ces évaluations et certains de leurs résultats à partir des outils et travaux développés en didactique des mathématiques. En effet, lors de la conception de ces évaluations, aucune analyse didactique des tâches n'est effectuée précisément ; or, un tel travail nous semble indispensable pour expliciter ce qui est effectivement évalué et mieux caractériser les connaissances des élèves en mathématiques lors de l'analyse des résultats. Nous avons donc conçu une recherche permettant d'exploiter les résultats du bilan école et d'inférer des constats au niveau des apprentissages des élèves. Il s'agissait pour nous de considérer ce qui était réellement évalué dans les items proposés du point de vue des connaissances mathématiques et des compétences plus transversales, de déterminer quel reflet de la connaissance des élèves était produit par les items proposés, et quels apprentissages étaient révélés.

Nous avons rapidement pris conscience de l'ambiguïté de l'objectif affiché par le bilan de la DEPP qui consistait à évaluer à la fois des compétences et des connaissances. En effet, les items ont été élaborés pour vérifier l'acquisition de compétences, sans que le lien entre compétences et connaissances ne soit clairement établi. Tout s'est passé comme si évaluer des compétences se situait au même niveau qu'évaluer des connaissances, or il nous a semblé qu'il y avait là un raccourci problématique.

[1] Méthode de Réponse à l'Item ou MRI, fondé sur le postulat que la réponse d'un individu à un item (et notamment sa probabilité de fournir une réponse correcte) est déterminée - ou peut être expliquée - par certains attributs du sujet et par les propriétés de l'item lui-même. Ces modèles permettent d'exprimer sur une même échelle le niveau de difficulté d'un item et le niveau de compétences d'un individu.

Méthodologie de la recherche

Pour mener à bien cette exploration, nous avons conçu un outil d'analyse d'items composé de facteurs de complexité et de compétences qui s'inspirent de divers travaux de chercheurs - taxonomie de Gras adaptée par Bodin (2004), niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (2008), des registres de représentation sémiotiques de Duval (1993), notion de compétences de Perrenoud (1997), Rey, Carette, Defrance & Kahn 2006, Beckers (2002) - et qui prend également en compte les résultats des travaux en didactique des mathématiques qui identifient des difficultés liées à certains domaines mathématiques.

Cet outil se décline en trois facteurs d'analyse : deux facteurs de complexité FC1 et FC2 et un facteur de compétences.

Facteur de complexité 1 : le contexte de l'énoncé

Dans ce facteur, le niveau de langue de l'énoncé ainsi que la nature des informations à traiter (texte, graphique, schéma, etc.) nous semblent important à considérer car il permet d'évaluer la complexité de la tâche du point de vue de la consigne et de la manière dont l'élève est amené à comprendre ce qu'il doit faire. La présence d'un exemple donné dans la consigne entraine, du point de vue de la tâche que l'élève a à réaliser, une simplification de celle-ci qui n'est certainement pas sans incidence sur l'activité de l'élève. A contrario, une consigne[2] « brute » peut être mal comprise (Image 1) et amener l'élève à ne pas répondre à ce qui est attendu :

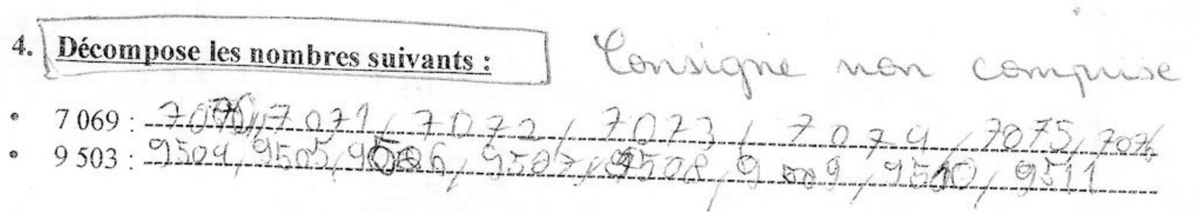


Image 1 - Production d'élève témoignant d'une consigne mal comprise

Facteur de complexité 2 : les savoirs mathématiques en jeu

Ce facteur est directement lié au savoir mathématique en jeu et nous convoquons des travaux développés en didactique des mathématiques dans le domaine de la numération des nombres entiers pour évaluer la complexité de la tâche proposée. Nous nous référons également aux travaux de Duval (1993) autour des changements de registres de représentation pour évaluer ce facteur de complexité. C'est dans ce facteur que sont prises en compte les variables didactiques propres au domaine étudié (taille des nombres, écriture des nombres, présence de zéros, etc.) et qui peuvent avoir une influence non négligeable sur la complexité de la tâche à réaliser. Par exemple, il n'est pas équivalent de demander aux élèves d'écrire en chiffres le nombre « quarante-trois-mille-cent-vingt-quatre » et le nombre « quarante-mille-vingt-quatre ».

Facteur de niveau de compétences

Pour ce facteur, la définition de compétence qui nous est apparue la plus adaptée est celle que Perrenoud (1997) a proposée, mais complétée par la prise en compte de l'aspect inédit de la tâche à réaliser retenu par certains auteurs (Beckers 2002, Rey, Carette, Defrance et Kahn,

[2] Par exemple : « décompose les nombres suivant le modèle : 6428 = 6x1000 + 4x100 + 2x10 + 8x1 »

2002). Pour nous, une compétence se définit donc comme :

> Une capacité d'agir de manière opérationnelle face à une tâche mathématique qui peut s'avérer inédite, en s'appuyant sur des connaissances que l'élève mobilise de façon autonome (Sayac, Grapin 2015).

Nous nous sommes inspirées des travaux relatifs aux différents niveaux de mises en fonctionnement des connaissances (Robert & Rogalski 2002) et des adaptations listées par Robert (2008) pour prendre en compte le caractère inédit[3] des tâches et le degré d'autonomie développé par l'élève confronté aux différentes tâches.
Ainsi, pour ce facteur, trois niveaux de compétences permettent d'évaluer dans quelle mesure la tâche proposée en évaluation est plus ou moins proche de la notion de compétence que nous avons retenue qui intègre aussi bien la restitution de connaissances qu'une capacité autonome de mobilisation de ces connaissances :

- Niveau 1 : pour les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mis à part la contextualisation nécessaire. Les tâches sont usuelles (image 2).


Hachurez la surface correspondant à la fraction ¼ dans la figure ci-contre :

Image 2 : Tâche illustrant un niveau1 de compétence

- Niveau 2 : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées. Les tâches sont relativement usuelles (image 3).


Hachurez la surface correspondant à la fraction ¼ dans la figure ci-contre :

Image 3 : Tâche illustrant un niveau 2 de compétence

- Niveau 3 : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont totalement à la charge de l'élève. Les tâches sont inédites (image 4).

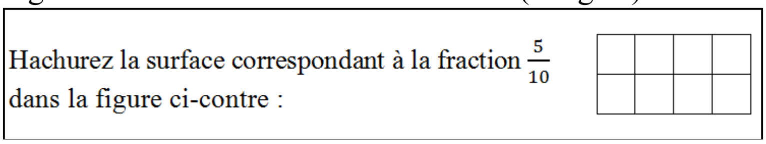

Hachurez la surface correspondant à la fraction $\frac{5}{10}$ dans la figure ci-contre :

Image 4 : Tâche illustrant un niveau 3 de compétence

Chaque item du bilan CEDRE 2008 a donc été affecté de trois nombres selon son niveau de complexité et de compétence :

- le facteur de complexité 1 (FC 1) coté entre 0 et 2 points
- le facteur de complexité 1 (FC 2) coté entre 1 et 3 points
- le niveau de compétence de valeurs 1, 2 ou 3.

Résultats de la recherche

En appliquant notre outil à l'ensemble des items du bilan CEDRE 2008, nous avons ainsi pu constater qu'ils ne se répartissaient pas de façon homogène du point de vue des niveaux de

[3] Nous entendons par inédit le fait que l'élève soit confronté à une tâche à laquelle il n'a pas l'habitude d'être confronté, par opposition aux tâches qu'il rencontre plus fréquemment (dans les manuels notamment).

complexité et de compétences comme l'illustre le tableau 1 :

	Facteur de complexité			Facteur de complexité 2			Niveau de compétences		
	FC1=0	FC1=1	FC1=2	FC2=1	FC2=2	FC2=3	NC=1	NC=2	NC=3
Nombre d'items	128	266	33	296	112	19	333	86	8
Répartition en %	30 %	62 %	8 %	69 %	26 %	4 %	78 %	20 %	2 %

Tableau 1 : Répartition des items CEDRE 2008 selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétence

Au-delà de ce résultat, nous avons également constaté que :

- Les items de niveau 3 de compétences sont souvent affectés d'un niveau élevé de complexité (supérieur ou égal à 3), ce qui ne permet pas d'évaluer pleinement la connaissance en jeu.
- Les élèves qui ne réussissent pas les items de faibles niveaux de complexité et de compétence semblent se heurter frontalement à un problème lié à la connaissance mathématique en jeu (ex : les décimaux).
- Il y a de nombreux items qui correspondent au niveau 1 de compétences et à un niveau faible de complexité. Ce qui ne permet pas d'augurer de la résistance des connaissances en jeu si on élevait le niveau de compétence et/ou de complexité.

De plus, il s'est avéré que l'ensemble des items proposés pour évaluer les connaissances et compétences des élèves de fin d'école ne recouvrait pas toutes les tâches relatives aux domaines mathématiques traités. Concernant les items relatifs aux décimaux, de nombreuses tâches relevant d'une même nature (comparer des nombres décimaux ou transformer une écriture décimale en une écriture fractionnaire et réciproquement) ont été proposées aux élèves, sans pour autant différencier leurs niveaux de complexité ou de compétences, ce qui est regrettable et préjudiciable à l'objectif visé par l'évaluation. Finalement, des constats ont été émis pour rendre compte du niveau de connaissances et compétences des élèves à partir d'un ensemble d'items peu représentatif de l'ensemble des tâches réalisables dans ce domaine.

Néanmoins, l'outil qui nous a permis d'analyser plus finement les items de cette évaluation bilan et de réaliser quels en étaient les défauts et de laisser entrevoir qu'il est possible de concevoir des évaluations externes plus acceptables d'un point de vue scientifique, en jouant sur les différents niveaux de complexité et de compétences.

DEUX RECHERCHES COMPLEMENTAIRES A LA PREMIERE

Le format QCM et les stratégies des élèves

Suite à cette première recherche, nous avons souhaité explorer le domaine des formats de questions, et plus particulièrement celui des QCM (Question à choix multiple) pour questionner la validité de ce format de question spécifique. Dans la réalité des classes de l'école primaire, en France, ce format est rarement, voire jamais, utilisé alors qu'il l'est régulièrement pour déterminer les connaissances des élèves de fin d'école primaire (10 - 11 ans) en mathématiques dans les évaluations nationales ou internationales standardisées.

Dans le cadre de la didactique des mathématiques en France, peu de recherches récentes ont été menées sur ce domaine ; nous pouvons citer à titre d'exemple les recherches d'Adda (1976), Duval et Pluvinage (1977) et Pluvinage (1979). Par contre, de nombreuses études portant sur l'utilisation des QCM pour des évaluations d'étudiants à visées différentes (formative, sommative, certificative, etc.) ont été menées (notamment Choppin 1975, Leclercq 1986, Gilles 1996).

Nous avons donc conçu une expérimentation permettant d'explorer tout à la fois la validité d'un QCM et les stratégies des élèves de l'école primaire confrontés à ce type de question. Nous avions fait l'hypothèse d'une corrélation entre le niveau de connaissances des élèves et les stratégies qu'ils utilisaient pour répondre aux QCM.

L'expérimentation a été menée en juin 2012 dans 6 classes de CM2 (soit 157 élèves au total), de Paris et de sa banlieue, variées en termes de population et de niveau scolaire afin de pouvoir tester notre hypothèse. Cette expérimentation a eu lieu après les évaluations nationales en mathématiques (début juin) afin de pouvoir bénéficier des résultats des élèves et ainsi déterminer leur niveau de connaissances de manière objective et permettant des comparaisons ; nous avons ainsi déterminé trois groupes d'élèves[4] : « faibles », « moyens » et « forts » selon leur score de réussite à ces évaluations nationales, communes à tous les élèves.

Nous avons élaboré un test comportant un nombre limité d'items pour que chaque élève puisse nous expliciter son raisonnement individuellement lors de la passation, et ainsi nous permettre de déterminer au plus juste la stratégie employée par l'élève pour choisir sa réponse. Le test a été conçu à partir de sept items, de niveaux variés du point de vue de la difficulté (l'item 7 étant particulièrement difficile) et pour qu'ils relèvent de deux catégories : ceux pour lesquels l'élève doit mobiliser des connaissances relatives aux fractions et aux nombres décimaux et ceux pour lesquels l'élève doit résoudre un problème dans le cadre des grandeurs et mesures (problèmes additifs, de proportionnalité et de calcul de périmètre).

Pour les items relevant des fractions-décimaux, les différents choix de réponses ont été effectués à partir d'erreurs reconnues comme fréquentes par différents travaux en didactique des mathématiques, Douady et Perrin-Glorian (1986), Comiti et Neyert (1979), Roditi (2007). En choisissant des distracteurs correspondant à des erreurs récurrentes d'élèves, nous souhaitions savoir s'ils étaient attractifs pour certains élèves (selon leur niveau de connaissances) ou au contraire s'ils étaient d'emblée rejetés.

La question des stratégies que développent les élèves lorsqu'ils sont confrontés à des QCM a été étudiée par de nombreux chercheurs (Choppin 1975, Leclercq 1986, 1987), mais elle a toujours été traitée pour des étudiants adultes. Choppin (1975) a retenu 3 modèles, combinant de manière variée connaissances des élèves et opportunités liées à la forme spécifique d'un QCM alors que Katz, Bennet, et Berger (2000) ont distingué les stratégies « traditional » des « non traditional ». Les premières reposant sur des procédures qui sont enseignées et que l'élève utiliserait pour répondre si la question était posée sous forme ouverte alors que les autres, spécifiquement associées à des QCM, sont celles où l'élève s'appuie sur les réponses proposées pour faire un choix.

[4] « Fort » correspond à un % de réussite de plus de 75% aux évaluations nationales, « moyen » entre 40% et 75%, « faible » moins de 40%.

De notre côté, nous avons dans un premier temps listé, de manière aussi exhaustive que possible (Annexe 1), les différentes stratégies que pouvaient utiliser des élèves de fin d'école pour répondre à des QCM, puis nous les avons regroupées suivant trois types selon qu'elles intégraient des niveaux différents de connaissances :

- Stratégies A : stratégies de savoirs. L'élève active des connaissances ou des savoir-faire (techniques – raisonnement) pour choisir la réponse qu'il pense être la bonne : soit il résout complètement la tâche (par la procédure de son choix, juste ou fausse : ce qui s'apparente aux stratégies « traditionnal » définies par Katz, Bennet & Berger (2000)), soit il teste les propositions de réponse et choisit celle qui peut convenir.
- Stratégies B : stratégies de substitution ou de repli. L'élève n'utilise pas ses connaissances mathématiques de façon explicite pour faire un choix : son choix ne repose pas de façon assurée sur ses connaissances.
- Stratégies C : stratégies mixtes. L'élève a initié un raisonnement pour répondre à la question posée, mais il se sert des différentes propositions de réponse pour finaliser son choix.

Le tableau 2 donne la répartition des stratégies utilisées suivant le niveau de connaissance des élèves :

	Stratégies A	Stratégies B	Stratégies C
Élèves faibles	64,9 %	25,4 %	9,7 %
Élèves moyens	63,5 %	24,7 %	11,8 %
Élève forts	76,1 %	12,8 %	11,1 %

Tableau 2 : Répartition des stratégies utilisées selon le profil des élèves

La recherche que nous avons menée tend à montrer que finalement, peu d'élèves répondent « au hasard » dans ce type de dispositif. De façon globale, les élèves ne semblent pas avoir perçu les avantages que ce dispositif pouvait leur procurer et ont été peu nombreux à utiliser la stratégie B1 (« au hasard », voir annexe 1). Il semblerait qu'un effet de contrat didactique empêche les élèves de fin d'école primaire à considérer que cette stratégie puisse être envisageable pour répondre, même dans les rares cas où nous leur avons suggéré face à leur désarroi.

Les élèves de l'école primaire n'adoptent pas un type de stratégies uniforme pour résoudre les tâches auxquelles ils sont confrontés, mais ils en changent suivant la nature de ces tâches et suivant leur niveau de connaissance. Alors que les élèves les plus forts n'utilisent quasiment que des stratégies de savoir pour répondre aux sept items du test, les élèves les plus faibles sont plus enclins à utiliser des stratégies de repli ou de substitution.

En complément des stratégies utilisées, des procédures mises en œuvre et de la réponse choisie, il nous a semblé complémentaire de pouvoir demander à l'élève d'estimer la qualité de sa réponse (bonne ou non) en lui demandant quel degré de certitude il lui attribuait. Définis par Leclercq et Poumay (2004, p. 3), les degrés de certitude sont « l'ensemble des jugements, des analyses, des régulations, conscientes ou non, (mais qu'il importe de rendre explicites, observables et conscientes) effectués par l'apprenant sur ses propres performances ».
En nous inspirant des travaux de Leclercq (1987, 2006), nous avons proposé une échelle de quatre degrés de certitude, adaptée à des élèves de fin d'école, variant de « pas sûr du tout » à « sûr et certain » : pas sûr du tout (1), pas très sûr (2), sûr (3), sûr et certain (4). Cette échelle, figurant sur la feuille de l'élève, était accompagnée d'une échelle numérique (de 1 à 4), lui laissant la possibilité de positionner leur degré de certitude entre deux degrés « entiers » (c'est-à-dire choisir un degré de certitude de 3,5 par exemple). L'utilisation des degrés de certitude, notamment pour les réponses correspondant à des conceptions erronées sur les fractions-décimaux nous permettait, au-delà du score de réussite, de préciser si l'élève est réaliste ou non sur ses connaissances.

Les difficultés relevées sur les connaissances des nombres décimaux par de nombreuses recherches en didactique des mathématiques sont confirmées, à nouveau, par les scores de réussite aux trois items correspondants.
Logiquement, nous avons pu constater que les élèves les plus performants sont plus sûrs de leurs réponses que les élèves qui le sont moins (en moyenne, 2,88 pour les plus « faibles », 2,97 pour les « moyens », 3,31 pour les plus « forts »). Néanmoins, les élèves du groupe « faibles » ne sont pas en manque de certitude, même si leurs résultats ne sont pas à la hauteur de leur espérance. Plus précisément, sur les items portant sur l'écriture des nombres décimaux, environ 20% des élèvent considèrent que l'écriture à virgule a,b est équivalente à celle de la fraction a/b. A ce stade de l'apprentissage, cette erreur considérée comme classique ne serait pas si préoccupante si les élèves qui la commette n'accordaient pas un degré de certitude élevé à leur réponse (environ un cinquième des élèves accordent un degré de certitude supérieur à 3 à une réponse qui est fausse). L' « ignorance ignorée » (Gilles, 1996) de ces élèves est particulièrement importante à réaliser, notamment pour les enseignants : en effet, il sera plus simple de déconstruire une fausse conception dont l'élève est peu assuré (« ignorance reconnue », (Gilles, 1996)), que lorsqu'elle apparaît à l'élève comme certaine.

Les items relatifs au lien entre écriture décimale et fraction ont produit des résultats assez inquiétants car, au-delà des scores de réussite assez faibles témoignant d'une mauvaise compréhension des décimaux, ils nous ont alerté sur le fait que certains élèves utilisent des règles erronées qu'ils appliquent avec un degré de certitude élevé (ignorance ignorée). Même si l'utilisation de QCM en cours d'apprentissage n'est pas préconisée (Grégoire & Laveault, 2005), on mesure à travers ce travail et ce type de dispositif, l'intérêt que présentent de telles informations pour l'enseignant et pour l'élève. L'utilisation en classe par l'enseignant de tels indicateurs semble une voie intéressante pour mieux appréhender le niveau de ses élèves et pour réguler son enseignement. Pour les erreurs fréquentes repérées par les didacticiens, nous convenons avec Pluvinage (1979) que « pointer cette erreur et faire remarquer son caractère attractif à un élève qui l'a commise est un service à lui rendre ». Par ailleurs, une différenciation « active » des élèves peut, dans les faits, amener à renforcer les inégalités scolaires et constituer un leurre préjudiciable aux élèves les plus en difficulté (Crinon, Rochex 2011).

QCM vs QROC

Nous avons voulu compléter cette première recherche sur les QCM et les stratégies de réponse par un questionnement plus ciblé sur la différence de format de question qui a déjà étudié notamment par Bennett, Rock et Wang (1991), Frary (1985) ou Bridgeman (1992). Nous avons donc réalisé une seconde expérimentation confrontant deux tests équivalents du point de vue des tâches mathématiques, mais différents par leur format : l'un avec des QCM extraits de CEDRE 2008 ou 2014, l'autre avec des Questions à Réponse Ouverte Courte (QROC).
Nous avons réalisé cette expérimentation en juin 2013 auprès de 195 élèves de CM2, de neuf classes différentes, qui ont été soumis successivement à deux tests, l'un exclusivement sous format de QCM, l'autre reprenant les mêmes tâches mathématiques, mais présentées sous format QROC.

Pour cette deuxième expérimentation, nous avons conçu deux tests de six items, équivalents du point de vue des tâches mathématiques, l'un sous forme de questions ouvertes, l'autre, sous forme de QCM. Le premier test a été effectué individuellement par les élèves dans leur classe et le deuxième test, sous forme de QCM, a été passé quelques jours après. Pour ce dernier, nous avons observé tour à tour, individuellement, chacun des élèves afin de le questionner sur la façon il a procédé pour choisir sa réponse et dans quelle mesure il était assuré de sa réponse ; la méthodologie employée pour l'étude de l'activité de l'élève en train de répondre à un QCM a été la même que celle employée pour la première expérimentation et nous a aussi permis d'étudier la stratégie mise en œuvre, la réponse choisie (réussite, échec/erreur significative), le degré de certitude qui lui a été accordé et la procédure développée pour répondre. En complément à ce travail spécifique aux QCM du test, une étude comparative entre les deux tests (en QROC et sous en QCM) nous a conduites à analyser les différences entre les procédures développées, les réponses fournies et à prendre en compte les rétroactions permises par le format spécifique QCM.

Le tableau 3 indique les pourcentages de réussite suivant le format des questions et la nature des tâches proposées dans les items du test :

	Pourcentage de réussite QROC	Pourcentage de réussite QCM
Écrire un nombre de l'ordre des millions	70,3%	88,2%
Donner (ou reconnaître) l'écriture à virgule d'un nombre écrit sous forme de fraction décimale	78,5%	74,9%
Donner (ou reconnaître) l'écriture sous forme de fraction décimale d'un nombre écrit avec une virgule.	51,8%	70,3%
Résolution d'un problème additif (simple)	70,8%	69,2%
Résolution d'un problème de proportionnalité (complexe)	19,0%	30,3%

Tableau 3 : Score de réussite selon le format de question

Nous pouvons d'emblée constater que la réussite à l'item QCM relatif à l'écriture des nombres est de 88%, alors qu'elle n'est que de 70 % au QROC, mais certaines réponses erronées au QROC semblent relever d'un manque d'attention plutôt que d'une méconnaissance majeure (écriture d'un chiffre à la place d'un autre, comme par exemple 5 542 006 ou lieu de 5 552 006). Même si des stratégies de savoir ont majoritairement été employées pour répondre au QCM, elles ne mettent pas en jeu les mêmes procédures qu'en QROC : si l'élève doit écrire le nombre en QROC, dans le QCM il doit reconnaître une écriture. On perçoit à travers les résultats des élèves à cet item la difficulté à laquelle on peut se confronter pour déterminer si l'élève a acquis ou non le savoir en jeu dans ces items relatifs à l'écriture des nombres entiers.

Concernant les items relevant du passage d'une écriture à virgule (D) à une écriture sous forme de fraction décimale (Q) et réciproquement nous constatons que la différence de format (ouvert-QCM) a un impact sur la réussite des élèves dans un des sens de transformation, mais pas dans l'autre : dans le sens Q => D , il n'y a pas de différence significative dans la réussite entre l'item posé sous forme ouverte et sous forme de QCM, alors que dans le sens inverse D => Q, la différence de réussite est ici significative (autour de 20 %) en faveur du QCM. Cette différence de réussite, selon le format, dans le sens Q => D, s'explique par un score important de non réponse en ouvert (environ 11 %) et par un effet rétroactif du QCM sur certaines réponses, qui ont été produites en ouvert, mais que les élèves ne retrouvent pas dans les choix (en particulier, des réponses justes, du type 237 + 8/10).

Concernant les deux items relevant de la résolution de problèmes (un problème additif, un problème de proportionnalité), nous avons également constaté des différences selon la forme (ouvert/QCM) et la complexité des problèmes. Pour le premier problème, assez simple, nous avons constaté que les scores de réussite étaient extrêmement proches entre les deux modalités (ouvert-QCM), mais il convient de noter que seulement les trois quarts des élèves qui ont réussi le problème en ouvert, le réussissent en QCM, alors que nous pensions que la réussite à un problème en ouvert entraînerait la réussite à son équivalent en QCM assez logiquement. A la différence du problème précédent, les scores de réussite du deuxième problème qui était assez complexe ont été très différents et en faveur du QCM (19 % de réussite en ouvert et 30 % de réussite en QCM) et cette fois, contrairement au problème additif, 90 % des élèves qui ont résolu le problème en ouvert choisissent la bonne réponse au QCM.

Pour les deux problèmes, le nombre de rétroactions permises par la forme QCM a été identique et a concerné environ 18 % des élèves. Dans le cas du problème additif, les rétroactions ont conduit la moitié des élèves à trouver, à la suite de la décision prise, la bonne réponse (à titre indicatif, 75 % ont repris leurs calculs ou les a vérifiés à la suite de la rétroaction). Sur le problème de proportionnalité, seulement 20 % des élèves a pu trouver la bonne réponse à la suite de la rétroaction ; à la différence du problème additif, 85 % des élèves n'ont pas cherché à reprendre leurs calculs, mais ont mis en place des stratégies autres que celles « de savoir ». Ainsi, dans le cas de problèmes complexes, l'effet rétroactif du QCM semble sans influence réelle sur la mobilisation de connaissances *a priori* évaluées.

Même si nous n'avons à notre disposition qu'un faible nombre d'items, nous avons pu constater, dans cette deuxième expérimentation, l'aspect potentiellement formateur du QCM notamment en situation de résolution de problèmes à travers l'étude des rétroactions fournies par les différents choix de réponse. Au-delà d'un apprentissage possible de stratégies propres aux QCM (écarter les réponses invraisemblables, utiliser les ordres de grandeur, tester les différentes propositions, etc.), apprendre avec les QCM pourrait permettre d'aider à la résolution de problèmes et développer chez l'élève une certaine autonomie : d'une part les différents choix de réponse « sécurisent » l'élève, mais d'autre part les choix de réponses lui permettent d'exercer un autocontrôle constructif sur ses résultats.

CONCLUSION

Ces deux études, menées à partir d'évaluation externes, nous ont permis de réaliser à quel point l'évaluation des élèves était un acte complexe, nécessitant la prise en compte de nombreux paramètres ne relevant pas exclusivement de connaissances didactiques.

Suite à ces recherches, nous pouvons conclure que l'étude des bilans évaluatifs dans une approche didactique permet de réaliser ce qui est réellement évalué du point de vue des connaissances en jeu, mais aussi de mieux comprendre comment les élèves s'emparent des questions posées selon les différents formats adoptés. Au-delà de ces constats, nous pensons que l'évaluation des apprentissages mathématiques des élèves doit faire l'objet d'une formation spécifique pour permettre aux professeurs de mieux exploiter les différentes modalités d'évaluation qui se trouvent à leur disposition (ce qui inclut les QCM) en fonction de leurs objectifs d'enseignement et ainsi en permettre un usage adapté selon les visées diagnostique, formative ou finale des évaluations qu'ils sont régulièrement amenés à concevoir dans leur classe.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADDA J. (1976) Difficultés liées à la présentation des questions en mathématiques, *Educational*

Studies in Mathematics 7 3–22.

BECKERS J. (2002) *Développer et évaluer des compétences à l'école : vers plus d'efficacité et d'équité.* Bruxelles : Labor.

BENNETT R E., ROCK D A., WANG M. (1991) Equivalence of Free-response and Multiple-choice Items, *Journal of Educational Measurement*, 28-1, 77-92

BODIN A. (2004) Taxonomie des énoncés mathématiques, classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive. http://www.apmep.asso.fr/07-Documents-et-articles.

BRIDGEMAN B. (1992) A comparison of Quantitative Questions in Open-Ended and Multiple-choice Formats, *Journal of Educational Measurement,* 29-3, 253-271

CHOPPIN B.H. (1975) Guessing the answer on objective tests, *British Journal of Educational Psychology* 45 206213.

COMITI C., NEYRET, R. (1979) A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de CM. *Grand N* 18 5−20

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.-J. (1986) Liaison école – collège : Nombres décimaux. Brochure n°62. Paris : IREM de Paris 7.

DUVAL R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5 37–35.

DUVAL R., PLUVINAGE F. (1977) Démarches individuelles de réponse en mathématique, *Educational Studies in Mathematics* 8.1 51– 116.

GILLES J-L. (1996) Utilisation des degrés de certitude et normes de réalisme en situation d'examen et d'auto-estimation à FA.P.S.E. - ULG, *Colloque de l'ADMEE-EUROPE "Dix années de travaux de recherche en évaluation".*

GREGOIRE J., LAVEAULT D. (1997) *Introduction aux théories des tests en sciences humaines*. Bruxelles : De Boeck.

FRARY R B. (1985) Multiple-choice versus free-response: a simulation study. *Journal of Educational Measurement*, 28-1, 21-31

KATZ, I., BENNETT, R. E., & BERGER, A. (2000) Effects of Response Format on Difficulty of SAT Mathematics Items: It's Not the Strategy. *Journal of Educational Measurement* 37.1 39–57.

LECLERCQ D. (1986) *La conception des questions à choix multiple.* Bruxelles : Labor.

LECLERCQ D. (1987) *Qualité des questions et signification des scores.* Bruxelles : Labor.

LECLERCQ D. & POUMAY M. (2004) Une définition opérationnelle de la métacognition et ses mises en œuvre. *Communication présentée à la 21ème conférence internationale de l'AIPU,* Marrakech.

LECLERCQ D. (2006) L'évolution des QCM. In Figari & Mottier-Lopez (Eds) *Recherche sur l'évaluation en éducation* 139– 146, L'Harmattan, Paris.

PERRENOUD P. (1997) *Construire des compétences dès l'école.* Paris : ESF.

PLUVINAGE F. (1979) Loto-questionnaires (pour l'évaluation et l'autocontrôle en mathématiques), *Educational Studies in Mathematics* 10 443–485.

REY B., CARETTE V., DEFRANCE A., KAHN S. (2002) Création d'épreuves étalonnées en relation avec les nouveaux socles de compétences pour l'enseignement fondamental. *Le point sur la*

Recherche en Éducation 23 51–63.

ROBERT A. (2008) Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed) (pp. 33–57). Toulouse : Octares.

ROBERT A., ROGALSKI M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x* 60 6–25.

ROCHEX J., CRINON J. (2011) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

RODITI E. (2007) La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 12 55–81.

ANNEXE 1

LISTE DES DIX STRATEGIES UTILISEES PAR DES ELEVES DE FIN D'ECOLE POUR REPONDRE A UN QCM

Stratégies A : stratégies de savoirs.

A1 : l'élève effectue la tâche demandée mentalement ou explicitement puis trouve, parmi les propositions, celle qui correspond à la réponse trouvée
A2 : l'élève reconnait d'emblée la « bonne » réponse parmi celles proposées (connaissance intériorisée)
A3 : l'élève applique une règle simple intériorisée, correcte ou non (théorème en actes)
A4 : l'élève teste les propositions de réponse une à une jusqu'à trouver celle qui convient.

Stratégies B : stratégies de substitution ou de repli.

B1 : l'élève répond au hasard
B2 : l'élève passe en revue superficiellement toutes les propositions, puis choisit celle qui lui paraît la plus vraisemblable
B3 : l'élève ne sait pas expliquer sa procédure
B4 : l'élève combine les nombres en présence de manière à trouver, parmi les choix possibles, une solution.

Stratégies C : *stratégies mixtes*.

C1 : l'élève commence par s'engager dans une procédure de résolution, mais sans aller jusqu'au bout (à la différence de A1) ; il utilise ensuite les différentes propositions de réponses pour conclure (en choisissant celle qui lui paraît la plus vraisemblable)
C2 : l'élève élimine les propositions qui paraissent fausses, puis déduit de celle(s) qui reste(nt), la bonne réponse.

UNE RECHERCHE COLLABORATIVE POUR ETUDIER LES PRATIQUES D'EVALUATION EN MATHEMATIQUES DES PROFESSEURS DES ECOLES

Nathalie **SAYAC**

Université Paris-Est Créteil, ESPE de Créteil

Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)

nathalie.sayac@u-pec.fr

Résumé

La question des pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs de l'école primaire est une entrée pertinente pour étudier les pratiques des enseignants dans la diversité de leurs méthodes et de leur fondement. C'est en tout cas, le point de vue que nous défendons. Après avoir mené des recherches sur des évaluations externes en mathématiques en fin d'école primaire, nous nous somme intéressée aux évaluations internes, notamment celles des professeurs de l'école primaire en mathématiques. Dans cette présentation, nous présenterons une recherche collaborative initiée avec des formateurs de terrain, pour étudier les pratiques d'évaluation des professeurs des écoles en mathématiques afin de les décrire, de mieux les comprendre, et de les conceptualiser.

Mots clés

Recherche collaborative, évaluation, mathématiques, professeurs des écoles

LES PRATIQUES D'EVALUATION EN MATHEMATIQUES DES PROFESSEURS DES ECOLES

Éléments de contexte

Comme le soulignait déjà Bodin en 1997, peu de recherches en didactique des mathématiques prennent en compte l'existence des faits d'évaluation et peu de recherches sur l'évaluation prennent en compte la spécificité des savoirs en jeu. De même, Mons précise dans l'introduction du rapport CNESCO (2014) que, encore aujourd'hui, l'évaluation des élèves par les enseignants dans la classe et les établissements est peu étudiée :

> Les évaluations internes par les enseignants dans la classe, bien qu'au cœur historiquement de l'institution scolaire, et analysées, à travers différents champs scientifiques (les sciences de l'éducation, la psychologie, etc.), par des chercheurs s'intéressant à la pédagogie (en particulier aux effets des évaluations sur les apprentissages des élèves), ont suscité peu d'états des lieux des pratiques des enseignants dans leurs classes (p.7).

Après avoir étudié des évaluations externes au niveau national et les pratiques des enseignants de manière globale (voir présentation Sayac & Grapin), nous avons donc naturellement porté notre attention sur les pratiques d'évaluations internes en mathématiques des professeurs des écoles. Nous rejoignons Perrenoud qui estime que :

> L'évaluation passe par les pratiques d'acteurs, individuels ou institutionnels, qui sont rarement dépourvus de raison et de raisons, mais dont les rationalités sont limitées et diverses, parfois

> contradictoires (1997, p.16).

Mais également Chevallard qui estime que « l'expulsion de l'évaluateur des discours sur l'évaluation » est dommageable pour comprendre les faits d'évaluation et que :

> Ce qui importe avant toute chose, pour qu'un « fait évaluatif » soit reconnu comme tel, c'est la connexion qu'on voit s'y établir entre deux institutions ou, plus largement, deux objets institutionnels – l'objet « élève » et l'objet « professeur » par exemple –, incarnés en certains individus concrets (1989, p.10).

Du point de vue institutionnel, il est important de préciser qu'actuellement, en France, l'évaluation des élèves est une préoccupation majeure du Ministère de l'Éducation Nationale et que la réforme de la formation des enseignants promeut fortement la recherche dans la formation. C'est aussi dans ces perspectives que notre recherche s'inscrit.
Nous avons donc initié une recherche au printemps 2014 pour étudier les pratiques d'évaluation des professeurs des écoles en mathématiques et ainsi avoir accès aux significations et intentions dans le but de produire des connaissances scientifiques concernant cette thématique. Cette recherche s'inscrit dans la tâche 3 du projet ANR NéoPraEVAL (Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'EVALuation et d'enseignement des mathématiques, édition 2013), centrée sur les pratiques d'évaluation des enseignants, en mathématiques.

La recherche collaborative

Pour mener à bien cette nouvelle recherche, il nous a semblé pertinent de concevoir une recherche collaborative (Desgagné, 1997) avec des professionnels du terrain, intéressés par les questions posées et qui ont également eu envie d'expérimenter cette nouvelle modalité de formation à et par la recherche.
En effet, le concept de recherche collaborative (Desgagné, 1997) nous a semblé à la fois s'inscrire dans le prolongement de notre travail à la DEPP[1] où l'équipe de concepteurs d'items mathématiques pour le bilan était mixte et à la fois converger dans notre conception de la formation, en étroite collaboration avec la recherche.
Autour de la formation des enseignants en mathématiques, on trouve plusieurs recherches s'inscrivant plus ou moins directement dans la lignée des recherches collaboratives. Depuis de nombreuses années déjà Jaworski (2004, 2005) défend l'idée que l'enseignement (et l'apprentissage par conséquent) des mathématiques peut se développer à travers un processus de recherche qui implique l'investigation et la conception, ce qui l'a conduite à mettre en place des recherches développementales de co-learning entre professeurs, formateurs et chercheurs (notamment Learning Communities in Mathematics LCM) s'appuyant sur le concept de « community of inquiry ». Dans ce cadre, elle promeut l'idée que :

> Teachers and didacticians each bring specialised knowledge to developing teaching, and hence learning, of mathematics. Together we can use, and explore the use of this knowledge in order to improve the mathematical learning experiences of students in classrooms and to know more about the creation of good opportunities for learning. The words "together" and "explore" adumbrate the concept of inquiry community (Wells, 1999). Fundamentally, inquiry and exploration are about questioning: asking and seeking to answer questions. Together, we ask and seek to answer questions to enable us to know more about mathematics teaching and learning. Moreover, the asking of questions is a developmental tool in drawing students, teachers and didacticians into a deeper awareness of their own actions, motives and goals (Jaworski & Goodchild, PME 2006, p.353).

Au Québec, Bednarz et d'autres chercheurs québécois ont également revendiqué très tôt « l'idée clé d'une recherche menée avec les praticiens, et non sur les praticiens, à propos de questions qui les concernent de près et sur lesquelles ils ont des éléments de compréhension à apporter et la nécessité de faire autrement » (Bednarz, p 14, 2013). Elle a ainsi menée des recherches, en enseignement des mathématiques, autour de questions comme celles de l'intervention dans des

[1] D.E.P.P : Direction de l'Evaluation, de la prospective et de la Performance du Ministère de l'Education Nationale.

classes faibles, des transitions primaire secondaire ou secondaire postsecondaire, ou encore du développement de certains contenus, ou processus, posant des difficultés d'enseignement (Bednarz, 2009-a, 2009-b ; Bednarz, Poirier & al., 2001).
En France, c'est Roditi qui s'est le plus engagé dans ce type de recherche notamment dans le cadre d'une recherche (Roditi, 2006) qu'il a menée avec un groupe d'enseignants dans le but de mieux comprendre comment la prise en charge du travail personnel s'inscrit dans la pratique enseignante, et de montrer qu'une évolution à ce sujet pouvait engendrer des effets bénéfiques sur les apprentissages des élèves, et une seconde recherche réalisée par une équipe, codisciplinaire de chercheurs en éducation (Blanchard-Laville, Roditi, Chaussecourte 2007), portant sur la pratique d'un enseignant de l'école primaire (élèves de 3 à 10 ans) avec lequel les chercheurs ont travaillé pendant dix années depuis son entrée dans le métier jusqu'à ce qu'il devienne formateur. Dans ces deux recherches, Roditi s'est interrogé sur la relation entre chercheurs et enseignants qui est soumise à des contraintes, des attentes et des besoins différents, même s'il souligne que « dans l'asymétrie des places entre celle des chercheurs et celle des enseignants, il y a une finalité partagée qui justifie l'investissement de chacun et qui est poursuivie différemment selon sa place : celle de l'apprentissage des élèves. » (Roditi, 2013, p 363)

Pour constituer l'équipe de recherche, nous avons donc sollicité des formateurs de terrain investis dans la formation des professeurs des écoles avec des fonctions différentes au sein de l'éducation nationale en France : conseillers pédagogiques (trois d'entre eux), maitres-formateurs (deux d'entre eux) ou encore directeurs d'école élémentaire (deux d'entre eux), dans l'académie de Créteil. Il n'y a que des femmes. Quatre d'entre elles ont obtenu un Master 2 spécialité « Éducation et métiers de l'enseignement » dans l'académie de Créteil, dans un dispositif de validation des acquis de l'expérience (VAE), et se sont donc quelque peu acculturées à la recherche dans ce cadre.
Après avoir établi un contrat de collaboration avec elles (co-élaboration du questionnement, de la méthodologie de recherche, cadrage des conditions matérielles et scientifiques de la recherche, etc.), il a été convenu que cette recherche se déroulerait pendant au moins deux ans : la première année sera consacrée à récolter des données sur les pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles, à les traiter en utilisant/adaptant un outil conçu pour analyser les items de l'évaluation CEDRE (voir Sayac, Grapin, 2014, 2015). La deuxième année sera davantage orientée vers l'élaboration de dispositifs de formation à l'évaluation en mathématiques.

Problématique

Cette recherche vise à étudier les pratiques évaluatives des professeurs des écoles en mathématiques au travers des évaluations qu'ils proposent à leurs élèves, que ce soit durant une séquence ou à la fin de celle-ci. Elle s'inscrit pleinement dans le champ de la didactique des mathématiques et plus particulièrement dans le cadre de la « double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques » (Robert & Rogalski, 2002), mais réorienté suivant les trois dimensions proposées par Roditi (HDR, 2011) : institutionnelle, sociale et personnelle. Dans cette optique, nous étudions donc « les pratiques enseignantes en mathématiques » des professeurs des écoles, notamment dans leur activité d'évaluation qui répond à des finalités à la fois professionnelles et personnelles.
En France, l'activité d'évaluation des enseignants est cadrée par des textes officiels qui émettent des préconisations. Dernièrement, de nouvelles orientations ont été diffusées avec la parution de trois textes importants : le nouveau référentiel des compétences professionnelles des métiers

du professorat et de l'éducation[2], la circulaire de préparation de la rentrée 2014[3] et les recommandations du Conseil supérieur des programmes (CSP) de juin 2014. La loi de refondation de l'école de 2013 avait déjà introduit des nouvelles prescriptions institutionnelles sur l'évaluation et mis l'accent sur « *l'évaluation positive* », « *valorisant les progrès* », évitant ainsi la « notation sanction » tout en insistant sur son caractère simple, lisible par les familles pour mesurer le degré des connaissances, des compétences et la progression des élèves.
La pression institutionnelle est donc forte sur cette activité que les enseignants de l'école ont à réaliser dans l'exercice de leur métier. Ils sont ainsi exhortés à « *construire et utiliser des outils permettant l'évaluation des besoins, des progrès et du degré d'acquisition des savoirs et des compétences* » (référentiel de compétences p 6), « *valoriser les réussites, les progrès de tous les élèves en pratiquant une évaluation bienveillante, en se référant aux compétences du socle commun* » (circulaire rentrée 2014), varier les modalités d'évaluation (recommandations CSP) en :

- identifiant plusieurs niveaux de réussite pour chaque type de connaissances et compétences évalué,
- permettant aux élèves n'ayant pas totalement validé le socle à l'issue du collège de pouvoir le valider plus tard,
- faisant une place aux tâches faisant appel à plusieurs domaines de formation dans les procédures d'évaluation.

Par ailleurs, les contraintes sociales pèsent également lourdement sur l'activité d'évaluation que les enseignants ont à réaliser régulièrement. Des travaux (Butlen, Peltier-Barbier, Pézard, 2004, Coulange 2013) ont montré comment ces contraintes peuvent amener les professeurs enseignant dans des établissements en ZEP (zone d'éducation prioritaire) à baisser leurs exigences en termes de contenus d'apprentissage et par conséquent en termes d'évaluation. Cauley et McMillian (2000) ont également montré que, pour les enseignants de l'école primaire, la composante « social behavior » de l'évaluation avait un poids plus fort que chez les autres enseignants et qu'ils avaient davantage tendance à prendre en compte des facteurs non disciplinaires dans leurs évaluations. Nous avons également constaté, à partir d'une étude exploratoire[4], qu'il se pourrait que les professeurs des écoles aient une forte tendance à survaloriser leurs élèves les plus en difficultés. En effet, à partir de copies corrigées d'élèves et des commentaires écrits par les professeurs, il semblerait que le choix des tâches proposées dans les évaluations étudiées, ainsi que leur validation, étaient extrêmement variables selon les professeurs et les écoles où ils enseignent. L'objet de la recherche en cours est donc, en partie, de vérifier cette hypothèse.
Nous faisons également l'hypothèse que la dimension personnelle est très forte dans l'activité d'évaluation de l'enseignant de l'école primaire dans la mesure où d'une part il y a, en réalité, peu de formations à l'évaluation (initiale ou continue) ce qui entraine une autonomie pédagogique des enseignants plus grande et d'autre part, que c'est une activité qui est fortement sous-tendue par des conceptions et des représentations personnelles. En effet, les questions de ce que doit être une évaluation, de comment la concevoir et de sa finalité sont essentielles pour comprendre ce que le professeur propose à ses élèves en matière d'évaluation.
Il s'agira donc, dans cette recherche, d'étudier les pratiques évaluatives des professeurs des écoles en mathématiques, à partir des tâches auxquelles ils confrontent leurs élèves dans les différents moments d'évaluation qu'ils leur proposent. L'analyse des tâches mathématiques proposées en évaluation par les professeurs de notre échantillon sera réalisée à partir d'outils

[2] Arrêté du 1-7-2013 - J.O. du 18-7-2013

[3] Circulaire n° 2014-068 du 20-5-2014

[4] À l'été 2014, j'ai récolté une vingtaine d'évaluations de professeurs des écoles autour des notions de fractions & décimaux ainsi qu'un questionnaire en ligne permettant de récolter quelques informations sur ces professeurs.

développés dans le cadre d'une approche épistémo-didactique (Grapin, Grugeon, 2015) et psycho-didactique (Vantourout & Goasdoué, 2014). Il s'agira principalement de les analyser du point de vue du recouvrement du domaine étudié et de leur complexité pour étudier dans quelle mesure elles varient et se distinguent suivant les professeurs (dimension personnelle), les niveaux de classe (dimension institutionnelle) ainsi que les lieux de classe (dimension sociale).

La dimension institutionnelle sera également appréhendée à partir de la variété des contextes de pratiques évaluatives (prescriptions curriculaires locales, caractéristiques d'enseignement spécifiques, formes pédagogiques, cultures de la société, etc.) et différents niveaux de codétermination seront étudiés (Chevallard 2002, Artigue & Winslow 2009).

Nous tâcherons également de dégager des « portraits évaluatifs » de professeurs qui seront déterminés à partir de la variété et de la nature des tâches mathématiques qu'ils proposent en évaluation à leurs élèves, mais aussi à partir d'éléments personnels qui contribuent à l'élaboration de ces évaluations, notamment des dilemmes (Wanlin & Crahay, 2012) auxquels ils sont confrontés qu'il conviendra de mettre à jour et qu'il faudra déterminer. Nous convoquerons également le concept de documentation scolaire (Margolinas, Wozniak, 2009) utilisée par les enseignants pour élaborer leurs évaluations pour étayer ces portraits évaluatifs. Ces portraits évaluatifs en mathématiques auront pour but, au-delà de ce qu'ils donneront à voir, de permettre une projection sur des questions de formation à l'évaluation qui animent aussi bien les chercheurs que les praticiens engagés dans cette recherche collaborative.

METHODOLOGIE ET OUTILS D'ANALYSE

Méthodologie

L'enquête en cours a donc pour but d'étudier les pratiques évaluatives en mathématiques des professeurs des écoles et de dégager des portraits évaluatifs en mathématiques de ces professeurs à partir de données suffisamment riches pour nous permettre d'attendre nos objectifs. Les réunions menées dans le cadre de la recherche collaborative ont abouti à un certain nombre de choix méthodologiques.

Au niveau des professeurs étudiés

Le nombre de professeurs des écoles de notre échantillon devra être suffisamment élevé pour permettre d'explorer la diversité des pratiques d'évaluation en mathématiques à l'école primaire, mais il ne saurait l'être trop car il importe de récolter un ensemble de données suffisamment riches pour permettre d'affiner les portraits évaluatifs que nous souhaitons dégager. La vingtaine de professeurs des écoles ayant accepté de participer à notre étude et qui se trouve dans une certaine diversité de contextes nous semble correspondre aux besoins que nous avons identifiés :

- Des enseignants débutants (professeurs stagiaires, professeurs débutant jusqu'à la 2ème année d'exercice) : au moment de l'entrée dans le métier, il nous semble intéressant d'étudier comment ces professeurs s'y prennent pour élaborer leurs évaluations, sur quelles ressources ils s'appuient pour le faire et ainsi déterminer plus spécifiquement des besoins en formation initiale.
- Des enseignants en REP (réseaux d'éducation prioritaire) : en effet, nous avons fait l'hypothèse que les enseignants de ces classes différencient leurs évaluations qu'ils donnent à leurs élèves, de même que Cauley et McMillian (2000) avaient noté qu'ils différenciaient leurs pratiques de notation dans ce type de classes. Nous explorerons cette différenciation à partir de la qualité et de la variété des tâches proposées.

- Des enseignants « lambda » : il nous semble indispensable d'avoir un panel de professeurs des écoles qui ne présentent aucune des deux caractéristiques précédentes, même si l'ambition d'avoir un échantillon représentatif à l'échelle de la France n'est hélas pas envisageable.

Au niveau du domaine mathématique étudié

Après avoir discuté de l'opportunité de nous restreindre ou pas à un domaine mathématique donné, avec les incidences contingentes que cela pourrait avoir sur les niveaux de classes et le nombre de professeurs étudiés, nous avons convenu qu'il serait opportun de travailler dans le domaine de la numération des nombres entiers (connaissances et écriture des nombres). En effet, ce choix permet à la fois d'explorer les pratiques d'évaluation d'enseignants du CP au CM2, et à la fois d'intégrer les travaux que Nadine Grapin réalise actuellement dans le cadre de sa thèse sur l'évaluation des acquis des élèves, spécifiquement en fin d'école primaire dans le domaine des nombres entiers (leurs écritures, leurs propriétés et les opérations). Elle a ainsi défini, en lien avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2001), une praxéologie de référence pour analyser le contenu d'une évaluation dans ce domaine. Nous nous appuierons donc sur son travail pour situer les tâches proposées par les professeurs de notre échantillon dans leurs évaluations et pour déterminer leur couverture didactique. L'étude de ce recouvrement ne pourra se faire à l'échelle d'un professeur car la restriction à un niveau de classe (celui dans lequel enseigne le professeur) est trop restrictive, mais cela permettra de repérer les types de tâches récurrentes ou au contraire non usuelles. Tempier (2013) avait mis en évidence dans sa thèse que les tâches de décomposition des nombres en unités de numération n'étaient pas prépondérantes dans la réalité du travail de classe, nous verrons dans quelle mesure nous pourrons retrouver ce résultat au niveau des évaluations.

Au niveau des données à récolter

Il nous semble indispensable pour explorer les questions de continuité et ruptures entre les tâches proposées lors de la séquence d'apprentissage et les évaluations proposées par les professeurs des écoles de récolter aussi bien les exercices donnés en classe ou en devoirs, que les différentes traces d'activités proposées (ardoise, questions orales, etc.) qui auront été réalisés au cours d'une séquence d'enseignement sur la numération. Nous récolterons bien évidemment toutes les évaluations proposées par l'enseignant, sans préciser lors de la demande la nature des évaluations attendues. En effet, la distinction entre les différents types d'évaluation (diagnostique, formative, formatrice, sommative) ne nous semble pas forcément intégrée, voire comprise, par les enseignants français et nous ne souhaitons pas introduire de biais de récolte en précisant la nature des évaluations attendues.
Nous souhaitons également explorer la documentation scolaire (manuel de l'élève, livres du maître, fichier de l'élève, documents et matériel d'accompagnement, etc.) des professeurs et connaître les ressources (notamment virtuelles) qu'ils utilisent pour élaborer leurs évaluations. Les ressources institutionnelles utilisées seront également intéressantes à considérer pour appréhender la dimension institutionnelle des pratiques évaluatives des professeurs. Nous avons indiqué précédemment qu'actuellement en France, les préconisations institutionnelles via des textes officiels étaient nombreuses, nous verrons dans quelle mesure les enseignants s'en emparent et s'en inspirent pour concevoir leurs évaluations.
Un court questionnaire sera également proposé aux professeurs de notre échantillon, en amont de toutes les autres données nécessaires à la recherche. Il permettra de récolter des données biographiques et professionnelles indispensables pour dresser les portraits évaluatifs que nous souhaitons réaliser et analyser les données qu'ils auront fournies.

Nous souhaitons également récolter des travaux corrigés d'élèves (une copie d'un élève ayant réussi l'évaluation, une copie d'un élève ayant moyennement réussi l'évaluation et une copie d'un élève ayant majoritairement échoué à l'évaluation). Ces données nous permettront d'une part de nous renseigner sur le niveau et le rapport aux mathématiques des enseignants de notre échantillon (DeBlois 2006, Vantourout & Maury 2006) et d'autre part, elles participeront à l'élaboration du portrait évaluatif du professeur en révélant des dimensions sociales et personnelles du professeur.
Dans la recherche exploratoire évoquée précédemment, nous avions récolté, à partir d'un questionnaire en ligne, des données sur la manière dont les professeurs des écoles élaboraient leurs évaluations et ce qui les sous-tendaient du point de vue de leurs conceptions, mais nous avons réalisé que les réponses apportées par ce biais n'étaient pas assez précises et/ou pas assez instructives, donc peu exploitables. Nous avons donc convenu que, pour avoir accès aux explications et justifications des professeurs relativement à leurs évaluations, nous leur proposerions un entretien semi-directif à partir des données qu'ils auront fournies qui permettra de mieux comprendre leurs intentions et la manière dont ils ont choisi les exercices de leurs évaluations. Nous chercherons ainsi à avoir accès aux domaines de réalité institutionnels des professeurs (Coulange, 2013) et aux formes pédagogiques prescrites ou observées à l'échelle de leur école (dynamique d'équipe, caractéristiques) et de leur classe.
Pour ce faire, nous étudierons préalablement l'ensemble des tâches proposées durant la séquence retenue et dégagerons, en amont de l'entretien, les questions susceptibles de nous éclairer dans nos analyses. Nous profiterons de cet entretien pour récolter des informations qui seront utiles à nos analyses, complémentaires à celles obtenues par le questionnaire. Le schéma ci-dessous (figure 1) illustre les grands axes d'informations qui orienteront notre entretien (conception, tâches, usages) et nous permettra de cadrer les questions qu'il nous faudra poser. Cet entretien sera enregistré et retranscris pour permettre son exploitation.

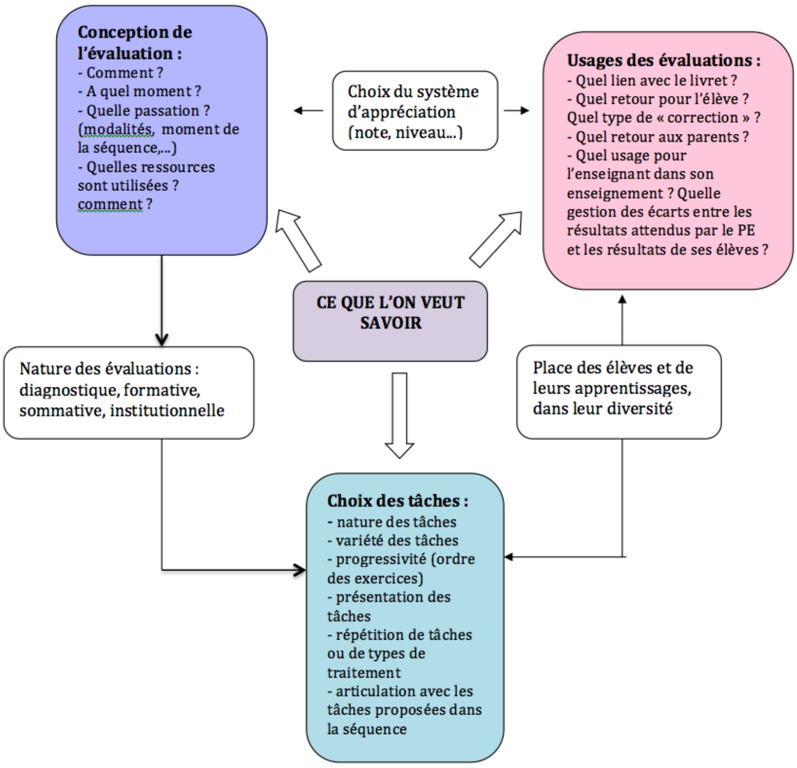


Figure 1 : les grands axes d'informations orientant l'entretien

Outils d'analyse

Pour analyser les tâches proposées par les enseignants dans leurs évaluations, nous utiliserons l'outil d'analyse d'items développé antérieurement (Sayac, Grapin, 2014, 2015) pour analyser les évaluations externes de la DEPP et l'adapterons, si besoin, aux évaluations de classe. Cet outil a été conçu à partir de différents travaux, notamment ceux de Gras, repris par Bodin (2004) sur les taxonomies des énoncés de problèmes mathématiques permettant de classer par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive, l'activité des élèves et ceux réalisés par des chercheurs canadiens dans le cadre de l'EIACA[5] sur la « numératie des adultes et son évaluation » (2003) qui ont permis de dégager un organigramme de complexité, décliné en cinq facteurs de complexité (répartis en deux ensembles : deux facteurs qui concernent surtout les aspects textuels des tâches et trois facteurs qui concernent les aspects mathématiques). À ces travaux s'ajoutent ceux réalisés en didactique des mathématiques sur des domaines particuliers. Pour ce qui concerne notre recherche centrée sur le domaine de la numération des nombres entiers, nous nous appuierons principalement sur les travaux de Chambris (2008), Mounier (2010) et Tempier (2013).
Cet outil se décline en trois facteurs d'analyse : deux facteurs de complexité FC1 et FC1 et un facteur de compétences que nous avons décrits dans la présentation de Sayac & Grapin qui sont précisés dans ces actes.
Pour chaque évaluation produite par un professeur de notre échantillon, nous étudierons donc :

- ✓ La diversité des tâches proposées en évaluation, au niveau de leurs niveaux de complexité et de compétences.

[5] Enquête Internationale sur l'Alphabétisation et les Compétences des Adultes. Les compétences évaluées sur des adultes en 2003 dans ce cadre portaient sur : la compréhension de textes suivis et schématiques, la numératie et la résolution de problèmes.

- ✓ La diversité des tâches proposées en évaluation, au niveau du domaine de la numération des nombres entiers.
- ✓ La diversité des tâches proposées en évaluation, au regard des programmes.
- ✓ La comparaison entre les tâches données durant la séquence et les tâches données en évaluation.

À partir de l'analyse de l'ensemble des tâches données aux élèves nous rechercherons, lors de l'entretien, ce qui a amené le professeur à proposer telle ou telle tâche pour ses évaluations. Au-delà de l'analyse outillée des évaluations, nous chercherons donc à avoir accès aux significations et intentions des enseignants lors de leur activité d'évaluation ce qui participera à l'élaboration du portrait évaluatif du professeur d'un point de vue des tâches mathématiques qu'il propose à ses élèves.

CONCLUSION

Étudier les pratiques en mathématiques des professeurs des écoles s'inscrit dans la continuité des études sur les pratiques des enseignants en mathématiques. Se restreindre à une activité spécifique des pratiques enseignantes en mathématiques est une piste intéressante et constructive à suivre, même si elle n'est pas simple à explorer du fait de la complexité des enjeux professionnel, personnel et institutionnel qu'elle sous-tend. Il est aujourd'hui crucial, du point de vue de la formation des enseignants en France, de prendre en compte de manière plus efficiente, cette activité au cœur des pratiques enseignantes.

Le cadre de la recherche collaborative adopté pour cette recherche participe de notre volonté de promouvoir la recherche dans la formation des enseignants et même si les objectifs des uns et des autres ne sont pas exactement les mêmes puisque pour les chercheurs il s'agit de dégager des connaissances scientifiques autour du thème de l'évaluation des apprentissages mathématiques et s'inscrire dans l'idée évoquée par Chevallard (1989) d'élaborer « une théorie de l'évaluateur » alors que pour les praticiens formateurs, il s'agit plutôt de décrire, comprendre, conceptualiser les pratiques d'évaluation en mathématiques pour construire des connaissances professionnelles au service de la formation et/ou de sa pratique personnelle.

Cette recherche n'est hélas pas encore aboutie et nous ne pouvons aujourd'hui produire les résultats attendus, mais nous espérons qu'ils permettront de mieux comprendre ce qui se joue en classe au niveau des apprentissages mathématiques des élèves, de tous les élèves, car il est aujourd'hui indispensable, pour lutter contre les inégalités scolaires, de mieux penser et concevoir les évaluations qui permettent aux élèves d'être confrontés à la réalité de leurs connaissances en mathématiques pour progresser et mieux apprendre.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., WINSLOW C. (2009) L'enseignement des mathématiques dans une perspective internationale : d'évaluations vers la recherche, Actes du colloque EMF2009, Dakar.

ARTIGUE M., WINSLOW C. (2010) *International comparative studies on mathematics education: a view from the anthropological theory of didactics*. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 1(30), 47–82.

BEDNARZ, N. (2013) *Regarder ensemble autrement : ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec*, Paris : L'Harmattan.

BEDNARZ, N. (2009-a) *Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques : une nouvelle entrée sur la conception d'activités en mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche*, Actes du 61ème colloque de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM), Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica (supp. n°2), 3-18.

BEDNARZ, N. (2009-b) Analysis of a Collaborative Research Project: A Researcher and a Teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties, Mediterranean *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 1-24.

BEDNARZ, N., DESGAGNE, S., DIALLO, P., POIRIER, L. (2001) *Approche collaborative de recherche : une illustration en didactique des mathématiques.* In P. Jonnaert, S. Laurin (dirs.), Les didactiques des disciplines, un débat contemporain, (pp. 177-207), Québec, Presses de l'Université du Québec.

BLANCHARD-LAVILLE, C., CHAUSSECOURTE, P. & RODITI, E. (2007). Recherche codisciplinaire sur les pratiques enseignantes : quels modes de coopération avec les praticiens observés ? *Éducation et Francophonie (36*) 45-61

BODIN, A. (1997) l'évaluation du savoir mathématique. Savoirs et Méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques 17(1/3)* 49-93.

BODIN, A. (2004) Taxonomie des énoncés mathématiques, classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive. *http://www.apmep.asso.fr/07-Documents-et-articles*.

BUTLEN, D., PELTIER-BARBIER, M.L., PEZARD, M. (2004) Des résultats relatifs aux pratiques de professeurs débutants ou confirmés enseignant les mathématiques à l'école. In Peltier-Barbier (Ed.) *Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP* (pp.70–81). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CAULEY, K, MCMILLIAN, J.H. (2000) *Do teachers grade differently in low SES middle schools?* Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

CHAMBRIS, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot - Paris 7.

CHEVALLARD, Y. (2002) *Organiser l'étude 1, 2 & 3. Écologie & régulation*. In Dorier, J. L. et al. (Eds.), Actes de la 11e école de didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989) Évaluation, véridiction, objectivation, Conférence inaugurale donnée lors des Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation (Paris, 27-29 septembre 1989). Paru in J. Colomb et J. Marsenach (éds), L'évaluateur en révolution, INRP, Paris, p. 13-36.

COULANGE, L. (2013) Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 32.3, 361-408, La Pensée Sauvage.

DEBLOIS, L. (2006) Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 62(3)*, 307-329.

DESGAGNE, S. (1997) Le concept de recherche collaborative : L'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants, *Revue des sciences de l'éducation 23(2*), 371-393.

GUEUDET, G., TROUCHE, L. (2010) *Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : Presses universitaires de Rennes ; Lyon : INRP.

JAWORSKI, B. (2004) Insiders and outsiders in mathematics teaching development: The design and study of classroom activity. In O. Macnamara & R. Barwell (Eds.), *Research in Mathematics Education*: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics: Vol 6 (pp. 3-22). London: BSRLM.

JAWORSKI, B (2005) *Learning communities in mathematics: Creating an inquiry community between teachers and didacticians*. In R. Barwell and A. Noyes (Eds.), Research in Mathematics Education: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics, Vol. 7 (pp. 101-119). London: BSRLM

JAWORSKI, B., GOODCHILD, S. (2006) *Inquiry community in activity theory frame*, In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME Vol. 3, 353-361.

MARGOLINAS, C., WOZNIAK, F. (2009) Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation* (*35* - 2), 59-82.

MAURY, S., VANTOUROUT, M. (2006) Quelques résultats relatifs aux connaissances disciplinaires de professeurs stagiaires dans des situations simulées d'évaluation de productions d'élèves en mathématiques, *Revue des sciences de l'éducation (32-3)*, 759-782

MOUNIER, E. (2010) *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot - Paris 7.

PERRENOUD, P. (1997) *Construire des compétences dès l'école*. Paris : ESF.

REMILLARD, J. T., HERBEL-EISENMANN, B. A., & LLOYD, G. M. (Eds.). (2009) *Mathematics teachers at work : Connecting curriculum materials and classroom instruction, Studies in Mathematical Thinking and Learning Series*, A. Schoenfeld, Ed. New York: Routledge.

ROBERT, A., ROGALSKI, M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe *Petit x (*60), 6–25.

RODITI, E. (2010). Une collaboration entre chercheurs et enseignants dans le contexte français de la didactique des mathématiques. Éducation & Formation, 293, 199-210.

RODITI, E. (2006) *Une formation pour la pratique et par la pratique, des hypothèses sur la formation continue.* In N. Bednarz, C. Mary, (dirs.), L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque international Espace Mathématique Francophone, Sherbrooke, Éditions du CRP (cédérom).

RODITI, E. (2011) *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*. HDR. Université René Descartes -Paris V.

RODITI, E. (2013) *Le métier d'enseignant et la recherche collaborative. In N. Bednarz (Dir.). Recherche collaborative et pratique enseignante*. Regarder ensemble autrement (pp. 351-364). Paris : L'Harmattan.

SAYAC, N. (2013) Pratiques de formateurs en mathématiques dans le 1er degré : les savoirs de formation, *Recherche et Formation (n°71)*, INRP Lyon.

SAYAC, N.., GRAPIN, N. (2014) Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degré de certitude. *Annales de didactique et de sciences cognitives (19),* 169–198

SAYAC, N.., GRAPIN, N. (2014) Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM. Volume XLII : 2, *Éducation et Francophonie. 64-83*. http://www.acelf.ca/c/revue/pdf/EF-42-2-064_SAYAC.pdf

SAYAC, N.., GRAPIN, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif, *Recherche en didactique des mathématiques 35(1) Grenoble,* La Pensée Sauvage, pp.101-126.

TEMPIER, F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

VANTOUROUT, M., GOUASDE, R. (2014) Approches et validités psycho-didactique des évaluations. *Éducation et Formation N°e-302*. http://ute3.umh.ac.be/revues/

WANLIN, P., CRAHAY, M. (2012) La pensée des enseignants pendant l'interaction en classe. Une revue de la littérature anglophone, *Éducation et didactique, n°1, vol.6*, 9-46.

WELLS, G. (1999). Dialogic Inquiry: *towards a sociocultural practice*. Cambridge : Cambridge University Press.

Rapport CNESCO : *L'évaluation des élèves par les enseignants dans la classe et les établissements : réglementation et pratiques. Une comparaison internationale dans les pays de l'OCDE,* Décembre 2014

Enquête internationale sur l'alphabétisation et les compétences des adultes (2003), Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Canada.

Note d'information de la DEPP, 10-17 octobre 2010 : les compétences en mathématiques des élèves de fin d'école primaire, Ministère de l'Éducation Nationale.

Note d'information de la DEPP, 10-18 (2010) les compétences en mathématiques des élèves de fin d'école primaire, Ministère de l'Éducation Nationale.

UNE RECHERCHE EN COURS SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES D'EVALUATION DES APPRENTISSAGES DES COLLEGIENS EN ALGEBRE

Julia **PILET**

Julie **HOROKS**

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil

julie.horoks@u-pec.fr

julia.pilet@u-pec.fr

Résumé

Dans le cadre du projet ANR NéoPraéval (Nouveaux outils pour de nouvelles pratiques d'évaluation), nous nous attachons à l'étude et à la caractérisation des pratiques enseignantes en termes d'évaluation au sein de la classe en algèbre élémentaire au collège. Nous présentons notre approche de l'évaluation, nos questions et les outils méthodologiques que nous avons construits pour caractériser les pratiques d'évaluation des enseignants en les mettant en perspective du contexte d'un travail collaboratif avec les enseignants. Nous présentons de premiers constats sur les pratiques d'évaluation que nous suivons, qui ne sont pas encore des résultats étant donné le manque de recul de cette recherche relativement récente.

Mots clés

Pratiques enseignantes, Evaluation, Algèbre, Travail collaboratif

Depuis un an, dans le cadre de l'ANR Néopraéval, nous nous penchons sur les pratiques d'évaluation des enseignants. L'évaluation est une entrée dans les pratiques qui nous semble donner accès aux logiques d'action des enseignants. Nous faisons l'hypothèse que les enseignants ont des représentations fortes sur l'évaluation, notamment en mathématiques, et que ces représentations jouent un rôle dans leur façon d'enseigner et dans les fonctions qu'ils donnent à l'évaluation. Ainsi interroger les pratiques d'évaluation peut être une nouvelle entrée dans la compréhension de la cohérence et de la diversité des pratiques enseignantes.

Notre étude se situe dans lignée des travaux présentés dans l'exposé de Brigitte Grugeon-Allys, en effet, nous regardons l'évaluation relativement à des contenus du domaine de l'algèbre. Il se situe de plus en parallèle de la présentation de Nathalie Sayac : alors qu'elle étudie les pratiques d'évaluation à l'école primaire, nous nous attachons à celles de l'enseignement secondaire, mais à travers un dispositif de travail avec les enseignants qui diffère de celui mis en place par Nathalie Sayac.

Après avoir défini ce que nous entendons par évaluer, nous présentons le travail collaboratif entre enseignants et chercheurs que nous avons mis en place. Nous présentons ensuite les principaux outils méthodologiques que nous avons conçus pour étudier les pratiques d'évaluation interne à la classe. Cette présentation s'accompagne de quelques constats sur les pratiques des enseignants que nous suivons, qui ne sont pas encore des résultats, étant donné le manque de recul de cette recherche relativement récente.

PRATIQUES D'EVALUATION : GENERALITES ET APPROCHE THEORIQUE

Nous adoptons deux façons de catégoriser l'évaluation : d'un côté par sa fonction pour l'enseignant, et de l'autre par sa mise en œuvre effective à travers différentes prises d'informations et exploitations.

Une caractérisation de l'évaluation par ses fonctions

Nous prenons en compte les fonctions classiques de l'évaluation (diagnostique, formative et sommative) pour décrire l'activité enseignante, mais sans nous limiter à celles-ci, qui ne paraissent pas toujours couvrir les catégories d'usages qu'en font les enseignants. En effet, même si ces catégories sont très présentes dans littérature (Braxmeyer N. et al., 2005 ; Rey & Feyfant, 2014) et en particulier la littérature pour la formation, on peut se demander si ces catégorisations correspondent à celles que les enseignants se créent pour eux-mêmes, même implicitement. Comment les enseignants définissent-ils eux-mêmes le fait d'évaluer ? Comment caractérisent-ils les différents types d'évaluation qu'ils font ?

Une caractérisation de l'évaluation en termes de prise d'information et de décision

Dans la littérature, l'évaluation est souvent caractérisée par le fait que l'enseignant recueille des informations sur les connaissances et les procédures des élèves et qu'il les utilise pour réguler l'activité des élèves. Pour De Ketele (1989),

> « Évaluer signifie : **recueillir** un ensemble d'**informations** suffisamment pertinentes, valides et fiables**, examiner** le degré d'adéquation entre cet ensemble d'informations et un ensemble de critères adéquats aux **objectifs** fixés au départ ou ajustés en cours de route, en vue de prendre une décision. »

Suivant la fonction de l'évaluation, ce recueil et cette exploitation peuvent se faire de différentes manières, plus ou moins formelles et avec des effets plus ou moins grands sur les choix ultérieurs des enseignants. Par exemple les informations fournies par une évaluation certificative, dont la fonction est de délivrer un diplôme, sont probablement moins exploitées par l'enseignant, du point de vue des apprentissages, que celles issues d'une évaluation diagnostique conçue pour vérifier les prérequis des élèves avant l'introduction d'une notion nouvelle.

Pour Black & Wiliam (1998), l'évaluation est formative lorsque les informations recueillies par l'enseignant sont utilisées pour répondre aux besoins des élèves et lorsqu'en retour l'élève s'engage dans la tâche et peut s'autoévaluer.

> « The term 'assessment refers to all those activities undertaken by teachers, and by their students in assessing themselves, which provide information to be used as feedback to modify the teaching and learning activities in which they are engaged. Such assessment becomes "formative assessment "when the evidence is actually used to adapt the teaching work to meet the needs. » (Page 2)

Quant à Ash & Levitt (2003), ils soutiennent que l'évaluation formative est une activité commune entre l'enseignant et l'élève, qui reste assez proche de ce que l'élève sait déjà faire. L'enseignant recueille des indices de l'activité de l'élève dans le but de les analyser et de prévoir l'étape suivante pour aider l'élève à évoluer.

Ces définitions mettent en avant trois dimensions dans l'acte d'évaluer : prendre des informations, les interpréter et les exploiter en vues de prendre des décisions. La prise de décision peut être différée de la prise d'informations. Elle peut aussi ne pas intervenir. Dans ces deux cas, cela ne rend pas le processus accessible à l'observateur. La prise de décision peut être

à plusieurs niveaux : au niveau global pour adapter le projet de l'enseignement, ou, au niveau local, avec des retours immédiats pour amener l'élève à comprendre l'écart entre l'attendu et ce qu'il a produit. La prise d'informations suivie ou non de prise de décisions a lieu à différents moments de l'étude et dans un continuum. Ces prises d'informations et de décisions dépendent des fonctions données à l'évaluation (Rey & Feyfant, 2014).
Les informations prises et éventuellement les prises de décisions sont une mémoire pour l'enseignant mais aussi pour l'élève, ce qui nous amène à symétriser la question de l'évaluation : la prise d'informations et son exploitation peuvent se faire du côté de l'élève, sur ses propres apprentissages ou activités et leur écart par rapport à ce qui est attendu, et/ou du côté de l'enseignant.
Dans cette approche de l'évaluation par prise d'informations et de décisions, nous accordons une place centrale aux contenus mathématiques (Bain, 1988 ; Perrenoud, 1998). En effet, prendre des informations fiables et en faire une exploitation pertinente pour les apprentissages suppose non seulement une gestion de la classe qui repose au moins en partie de ce que font ou savent les élèves, mais aussi de prendre en compte, dans les connaissances ou les procédures repérées, les spécificités du savoir en jeu.

Une analyse des pratiques dans le cadre de la double approche

Pour prendre en compte ces différentes dimensions de l'activité de l'enseignant, nous avons choisi de nous placer dans le cadre de la Double Approche de Robert & Rogalski (2002). Nous nous intéressons aux contenus mathématiques en jeu et aux tâches proposées par l'enseignant (composante cognitive). Pour ce faire, nous réalisons une analyse épistémologique des notions et de la façon dont elles sont mises en fonctionnement dans les tâches prescrites et dans les retours faits aux élèves.
Nous prenons aussi en compte ce qui se passe effectivement dans la classe lorsqu'y vivent ces contenus lors de la gestion effective de la résolution des tâches par l'enseignant, mais aussi lors des moments d'exposition et de structuration des connaissances. Ainsi pour analyser l'activité de l'enseignant, nous ne nous contentons pas de son discours sur ses pratiques, même si celui-ci apporte des éclairages sur la fonction qu'il ou elle déclare donner à l'évaluation et à laquelle nous n'avons pas totalement accès en observant les séances.
Enfin, la prise en compte des dimensions personnelle, sociale et institutionnelle du métier d'enseignant nous permet d'expliquer certains choix liés, par exemple, à l'expérience de l'enseignant, à l'établissement dans lequel il ou elle enseigne, au public concerné, aux programmes scolaires, etc.
Cette analyse de l'activité se fait à différents niveaux :

- Le niveau global rend compte du projet d'enseignement et permet de questionner la place qu'y prend l'évaluation ; par exemple le moment où elle est prévue et conçue par l'enseignant dans une séquence, plus ou moins en amont ;
- Le niveau local rajoute la gestion effective de la classe et la prise en compte des élèves, en particulier le fait de s'appuyer ou non sur leurs activités (ce qu'ils font, disent, écrivent) et leurs connaissances :
- Le niveau micro enfin permet d'analyser des routines de l'enseignant, qui ne dépendent pas toujours de la classe considérée et sont plus ou moins conscientisées par l'enseignant ; par exemple des habitudes récurrentes dans la façon d'interroger les élèves.

Ces trois niveaux sont parfois très imbriqués et il n'est pas facile de savoir ce qui relève de la routine ou de la situation effective de classe, même en passant du temps dans la classe d'un enseignant. Nous faisons cependant l'hypothèse qu'un grand nombre d'activités enseignantes liées à l'évaluation se situent au niveau du micro et que ces habitudes sont rapidement prises et

pas forcément faciles à déstabiliser par le formateur.
Une seconde hypothèse porte sur la place des contenus considérés, que nous pensons être faible dans les décisions relatives à l'évaluation prises par les enseignants, dont les choix reposent probablement sur des facteurs liés aux composantes sociales et institutionnelles du métier plus qu'à la composante cognitive.

Difficultés méthodologiques

Pour le chercheur, la difficulté est de repérer les prises d'informations par l'enseignant et sur quoi elles portent, alors qu'elles ne sont généralement pas accessibles à l'observateur. Ces informations peuvent être prises sur les activités des élèves et leurs procédures ou sur leurs connaissances, de manière individuelle ou collective, à l'oral ou l'écrit.
Lorsqu'elles sont exploitées immédiatement, cela rend la prise d'informations au moins partiellement visible pour nous (par exemple lorsqu'un enseignant interroge un élève et s'appuie sur sa procédure pour valider son travail). Mais, cette exploitation, comme nous l'avons souligné plus haut, peut être différée dans le temps, voire entièrement absente, ce qui pose la question de ce qui est rendu visible pour l'élève par rapport à ses apprentissages.
Du côté de l'élève, il nous est donc aussi très difficile de repérer individuellement des prises d'informations sur ses propres activités ou apprentissages, mais nous pouvons noter des moments où il est potentiellement possible pour un élève, ou pour l'ensemble des élèves, de valider sa procédure ou de la comparer avec la procédure optimale. De manière plus générale, on pourra relever d'autres fonctions des évaluations indirectement liées aux apprentissages, et qui visent plutôt à la motivation des élèves, leur engagement et leur réussite dans la tâche (Allal & Mottier-Lopez, 2007 ; Georges & Pansu, 2011), mais notre centration sur les contenus nous pousse à prendre en compte plus particulièrement les moments où il leur est rendu possible de mesurer l'écart entre ce qu'ils ont fait et ce qui est attendu, ce qui nous semble participer plus directement encore aux apprentissages mathématiques.
Pour avoir accès aux pratiques d'évaluation des enseignants, nous nous sommes engagés dans un travail collaboratif avec un collectif d'enseignants de collège.

LE TRAVAIL COLLABORATIF AU SEIN D'UN LEA

Le Léa Roger-Martin-du-Gard

Les Lieux d'Education Associés (Léa) ont été créé en 2011 par l'Institut Français de d'Education afin de promouvoir des recherches avec des acteurs d'un lieu à enjeu d'éducation (Monod-Ansaldi & Favelier, 2013). Les Léa associent pour trois ans une équipe de recherche et des acteurs de terrain pour répondre à des questionnements sur des enjeux d'apprentissage, d'enseignement et d'éducation et produire des ressources adaptées et utilisables.
Depuis la rentrée 2014 nous avons mis en place un Léa sur les questions d'évaluation des élèves et des pratiques d'évaluation des enseignants du collège. Il regroupe 4 enseignants et 7 chercheurs[1], s'ancre dans un collège en zone d'éducation prioritaire de Seine-Saint-Denis et s'organise autour d'un collectif d'enseignants de mathématiques du collège et de didacticiens du laboratoire de Didactique André Revuz. Il vise à développer de nouvelles pratiques d'enseignement, en particulier d'évaluation et de régulation, en s'appuyant sur des résultats de didactique des mathématiques, et plus spécifiquement de didactique de l'algèbre (Kieran, 2007 ; Grugeon et al., 2012). Il y a un double enjeu. Pour les chercheurs, il s'agit produire de

[1] Brigitte Grugeon-Allys, Mariam Haspekian, Julie Horoks, Michella Kiwan, Julia Pilet, Eric Roditi et Stéphane Sirejacob

la connaissance sur l’évaluation, sur les pratiques mais aussi l’enseignement et l’apprentissage de l’algèbre. Pour les enseignants, le Léa est un moyen de développement professionnel.
Nous travaillons ensemble sur la conception et l’expérimentation en classe de séances et séquences et d’outils d’enseignement favorisant la réussite de tous les élèves dans le domaine du calcul numérique et du calcul littéral. Ce domaine constitue un élément pivot du curriculum mathématique de l’enseignement secondaire pour pouvoir poursuivre des études scientifiques. Pourtant, il constitue un obstacle difficilement surmontable pour beaucoup d’élèves (Kieran, 2007). L’évaluation dans ce domaine présente donc d’autant plus d'enjeux pour favoriser la réussite du plus grand nombre d’élèves. Les ressources produites au sein du Léa s’appuient sur un principe de réalité qui prend en compte les contraintes et marges de manœuvres des enseignants afin que les ressources soient viables dans les classes et diffusables à plus large échelle.
Ce travail collaboratif nous donne accès à des pratiques pas totalement ordinaires puisque l’influence du chercheur est plus que probable. Cependant nous pouvons supposer que si ce dispositif perturbe les pratiques, il ne les bouleverse pas non plus profondément. Les évolutions doivent être considérées sur le long terme, ce qui nécessite de conserver l’intérêt et la confiance des enseignants impliqués dans le projet. Le contrat passé avec eux est clair quant aux enjeux doubles de la démarche, même s’ils ne participent pas activement à la recherche proprement dite.

Le fonctionnement du Léa

Notre démarche de production de ressources dans le Léa consiste, à partir des pratiques habituelles des enseignants, à faire des apports issus de la recherche pour essayer de les questionner et de les faire évoluer. Ces apports concernent à la fois des outils d’analyse didactique (analyse a priori/ a posteriori) et des résultats sur l’enseignement et l’apprentissage de l’algèbre pour mettre à jour des difficultés des élèves en lien avec des savoirs et savoir-faire peu présents dans les programmes et les manuels. Ces outils et résultats permettent de caractériser des situations d’apprentissages et leurs déroulements, caractériser les procédures et les erreurs des élèves en vue de mieux soutenir leur évolution. Ainsi nous faisons l’hypothèse qu’en travaillant avec les enseignants sur les tâches, les procédures, les progressions en algèbre, nous pourrons les accompagner dans une meilleure prise d’informations et de décisions en vue d’aider les élèves à progresser. Cela suppose aussi un travail sur la composante médiative des pratiques, et pas seulement cognitive, travail qui, compte tenu des contraintes de cette première année de recherche, n’a pas encore été entamé avec les enseignants.
En effet, ce choix, pour la première année, de faire des apports principalement sur les contenus et peu sur les pratiques d’enseignement et d’évaluation se justifie par le fait qu’il nous a permis de répondre aux attentes des enseignants en matière de conception de tâches et de séquences directement exploitables pour la classe tout en nous donnant les moyens d’accéder à leurs pratiques initiales d’évaluation. Les apports sur les contenus algébriques ont permis d’engendrer une base commune entre enseignants et chercheurs pour l’analyse réflexive.

Données recueillies dans le Léa pour la recherche

Les données recueillies dans le cadre du Léa sont variées mais surtout relativement nombreuses, ce qui pose la question du stockage, partage et traitement des données. Elles comportent :

- Des vidéos de séances au fur et à mesure de l’année scolaire, pour chaque enseignant, filmées généralement sans la présence du chercheur en classe,
- Les documents des enseignants pour la classe (séquence, feuille d’exercices, activités, évaluations écrites),

- Des productions d'élèves (cahiers, évaluations, interrogation au tableau),
- Les échanges enregistrés lors des réunions et entretiens avec les chercheurs.

Parmi ces données, nous distinguons celles issues de ce qu'on observe en classe et celles issues de dispositifs que nous mettons en place. Comme elles ne nous donnent pas accès aux mêmes informations, nous avons été conduits à produire plusieurs grilles d'analyse.

GRILLES D'ANALYSE ET PREMIERS CONSTATS SUR LES PRATIQUES D'EVALUATION DES ENSEIGNANTS DU LEA

Jusqu'à présent nous avons analysé trois types de données issues du Léa : celles relatives à la conception individuelle puis collective d'une évaluation diagnostique avant l'entrée dans l'algèbre, celles relatives aux observations de séances de classe et celles issues d'entretiens individuels avec les enseignants sur leurs pratiques déclarées. Nous présentons pour chacun nos axes d'analyse et les premiers constats qu'ils permettent de tirer sur les pratiques d'évaluation des enseignants du Léa.

Conception individuelle puis collective d'une évaluation diagnostique avant l'entrée dans l'algèbre

Nous avons demandé aux enseignants de concevoir individuellement, en début d'année, un test diagnostique pour mesurer les acquis numériques et pré-algébriques des élèves avant d'entrer dans l'algèbre. Leurs propositions ont été discutées lors la première réunion du Léa pour l'année scolaire 2014-2015. Les apports des chercheurs dans ce dispositif ont consisté en une liste de type de tâches qui couvraient l'ensemble des prérequis nécessaires pour entrer dans l'algèbre, et proposée aux enseignants lors de cette première réunion (cf. annexe 1, dont le tableau montre aussi les choix de tâches des enseignants nommés ici G, M, F et O).
Les évaluations produites par les quatre enseignants et la discussion qui a suivi nous ont permis de repérer des régularités chez ces enseignants :

- Des tâches répétitives comme la traduction d'une aire ou d'un périmètre d'une figure connue en formule algébrique ou l'exécution de programmes de calculs, ne couvrant qu'une partie du domaine testé,
- Une absence de certaines tâches, qu'on ne trouve par ailleurs généralement pas dans les manuels de ce niveau, par exemple les tâches portant sur les équivalences d'écritures ou sur la généralisation,
- Des justifications des choix de tâches qui portent sur le public difficile (ZEP) et sur l'expérience de la classe de 6ème (connaissance de ce qui y est généralement traité, ce qui dénote une volonté de tester les élèves sur ce qu'ils ont vraisemblablement vu en classe de 6ème), mais pas sur des critères liés aux contenus.

Ce premier dispositif a permis de faire émerger une évaluation diagnostique commune, passée ensuite dans les classes des 4 enseignants, et exploitée avec eux pour repérer dans les différentes procédures des élèves des éléments d'analyse de l'état de leurs connaissances liés au contenu spécifique. Le dispositif a également permis de faire prendre conscience aux enseignants de la nécessité de mettre en évidence les écritures en ligne dans le domaine numérique pour préparer l'entrée dans l'algèbre et de la nécessité de travailler des types de tâches de généralisation.

Observations des pratiques en classe dont celles relatives à l'évaluation formative

Pour observer les pratiques des enseignants en classe, nous avons essayé de dresser une liste d'indices qui nous paraissaient relever de la prise d'informations ou de décision reposant plus ou moins sur les productions et connaissances effectives des élèves. Cette grille nous permet de caractériser des pratiques enseignantes à des moments du travail en classe où il nous semble que l'évaluation est présente. Par exemple pendant les moments de résolution d'exercices, nous supposons que les critères suivants sont des indicateurs d'évaluation potentielle et des moments où il peut être donné aux élèves le moyen de se situer par rapport à leurs apprentissages. Ces critères sont :

- les modalités de recherche (temps et nature de la tâche laissée aux élèves, aides apportées),
- les modalités de mise en commun des travaux des élèves (avec appui plus ou moins important sur ce que les élèves ont produit),
- le bilan réalisé par l'enseignant (avec une validation des travaux corrects et/ou une justification mathématique, et une institutionnalisation éventuelle),
- ainsi que les initiatives laissées aux élèves dans ces différentes phases.

Cette grille d'analyse nous donne à voir :

- la diversité des pratiques de ces 4 enseignants (aider ou non pendant la recherche, faire venir les élèves au tableau ou les interroger depuis leur place, afficher ou non des productions erronées), y compris sur des séances identiques préparées ensemble,

mais aussi :

- des points communs (moins de recherche sur les tâches plus complexes, avec par conséquent moins d'appui sur ce que font les élèves),
- des régularités fortes dans les pratiques de chaque enseignant en ce qui concerne l'évaluation formative présente lors de ces différents moments (en ce qui concerne la place de l'erreur, la justification mathématique, le faible retour aux élèves), qui doivent certainement être rapprochées, entre autre, des fonctions que ces enseignants donnent à l'évaluation.

Entretiens individuels : rapport à l'évaluation et pratiques déclarées

Pour avoir accès au rapport des enseignants à l'évaluation, nous leur avons proposé un entretien individuel, guidé par quelques questions (cf. annexe 3), que nous avions données en amont aux enseignants. Les entretiens ont été enregistrés et transcrits.
Nous nous intéressons en particulier :

- à la prise en compte par les enseignants de facteurs extérieurs aux apprentissages pour expliquer leurs choix pour évaluer
- aux différentes modalités d'évaluation, orale ou écrite, formelle ou non,
- à la conception des évaluations, quand et à partir de quelles ressources,
- aux moments d'évaluation dans la séquence, avec quelle annonce faite aux élèves,
- aux contenus des différents types d'évaluation,
- aux informations prises dans les évaluations, sur les procédures et connaissances des élèves
- à l'exploitation des évaluations faite par les enseignants
- aux retours faits aux élèves à l'oral ou à l'écrit.

Ces entretiens ne sont pas faciles à exploiter car il s'agit avant tout de pratiques déclarées, mais, en les croisant avec les observations en classes, ils aident tout de même à expliquer certains choix des enseignants. Ils participent en particulier à mieux saisir les écarts plus ou moins grands dans la complexité des tâches données en classe et celle des tâches qu'ils choisissent pour les évaluations sommatives. Nous interprétons cet encart par rapport à la fonction que chacun donne à l'évaluation, et en comparant la complexité, pour chaque enseignant et entre eux, des tâches proposées avant et pendant l'évaluation sommative. Il ressort que pour certains enseignants cet écart varie suivant la fonction de l'évaluation. Pour un des enseignants par exemple, l'écart est minimisé pour les évaluations diagnostiques dans lesquelles il cherche à se rapprocher des tâches que les élèves ont déjà rencontrées alors qu'il augmente l'écart pour les évaluations sommatives en prévoyant des tâches avec une mise en fonctionnement des connaissances plus complexe (étapes non indiquées par exemple) que celle rencontrée pendant la séquence. Ces entretiens permettent aussi de constater chez ces enseignants une relative absence de retours faits aux élèves sur leurs évaluations, constat à nuancer là encore suivant les fonctions de celles-ci.

CONCLUSION

L'analyse et la caractérisation des pratiques d'évaluation sont peu étudiées en recherche. Pourtant nos premières analyses tendent à constater que les pratiques d'évaluation des enseignants semblent très installées et stables. Leur rapport à l'évaluation est très prégnant et peut être plus que leur rapport aux mathématiques. L'évaluation apparaît comme une nouvelle entrée potentielle d'analyse pour mieux comprendre les pratiques. Toutefois l'évaluation est complexe à analyser parce qu'elle est diffuse dans l'enseignement et intervient à divers moments du projet d'enseignement. C'est pourquoi nous avons mis en place plusieurs outils méthodologiques pour attraper l'évaluation à la fois en-dehors de la classe lors de la conception d'évaluations et pendant l'enseignement, lors d'échanges en classe. Ces outils s'appuient sur une approche du concept d'évaluation suivant trois axes : une prise d'informations sur les apprentissages des élèves, une interprétation et une exploitation qui vise à faire progresser l'élève dans les apprentissages. Nous considérons que cette analyse en termes de prise d'informations et de décisions doit se faire relativement aux contenus traités, c'est pourquoi nous avons choisi de traiter un domaine mathématique crucial pour la poursuite d'études, celui de l'algèbre élémentaire. Un prolongement possible de notre étude pourrait consister à comparer avec les pratiques d'évaluation dans d'autres domaines mathématiques pour prendre en compte l'analyse du contenu évalué.

Enfin, pour saisir et comprendre au mieux la cohérence des pratiques d'évaluation des enseignants, nous avons mis en place un dispositif de travail collaboratif au sein d'un Léa avec des enseignants de collège. L'objectif est d'avoir accès à leurs pratiques sur le long terme mais également de produire des ressources pour favoriser une évaluation au service des apprentissages des élèves en algèbre. Ce dispositif devra être analysé afin de mieux prendre en compte ses impacts potentiels sur les pratiques des enseignants. Il nous offre la possibilité de travailler dans un climat de confiance avec les enseignants et nous permet d'avoir accès à un grand nombre et une grande variété de données pour lesquelles nous devons poursuivre l'élaboration d'une méthodologie d'analyse spécifique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLAL, L., MOTTIER-LOPEZ, L. (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation*. De Boeck : Belgique.

ASH, D., & LEVITT, K. (2003). Working within the Zone of Proximal Development: Formative Assessment as Professional Development, *Journal of Science Teacher Education*, 14(1): 1-313.

BAIN, D. (1988). L'évaluation formative fait fausse route : De là, la nécessité de changer de cap. *Mesure et évaluation en éducation*, vol. 10 No 4.

Black, P., William, D. (1998). Assessment and Classroom learning, *Assessment in Education*, vol. 5, No 1.

BEDNARZ, N. (2013). Regarder ensemble autrement : ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. In Bednarz, N. (Eds) *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. pp 13-30. Paris : L'Harmattan.

BRAXMEYER N., GUILLAUME J.-C., LEVY J.-F. (2005). *Les pratiques d'évaluation des enseignants en collège*. Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective. (note et dossier).

DE KETELE, J.-M. (1989). L'évaluation de la productivité des institutions d'éducation. *Cahiers de la Fondation Universitaire : Université et société. Le rendement de l'enseignement universitaire*, 3, 73-83.

GEORGES, F., & PANSU, E. (2011). Les feedbacks à l'école : un gage de régulation des comportements scolaires. *Revue française de pédagogie*, n°176, pp.101-146.

GRUGEON-ALLYS B., PILET J., CHENEVOTOT-QUENTIN F., DELOZANNE E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

KIERAN C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Chapter 16, pp. 707-762.

MONOD-ANSALDI, R. ET FAVELIER, N. (2013) Les lieux d'éducation associés à l'IFE ; des laboratoires pour l'action conjointe des chercheurs et des enseignants. *Journal de l'IFE de Mars 2013*. http://ife.ens-lyon.fr/lea/outils/ressources/productions-internes/presentation-des-lea-mars-2013

PERRENOUD, P. (1998). From Formative Evaluation to a Controlled Regulation of Learning Processes. Towards a wider conceptual field, *Assessment in Education*, Vol. 5, N°1, pp.85-102.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.

REY, O. ET FEYFANT, A. (2014). Evaluer pour (mieux) faire apprendre. *Dossier de veille de l'IFE*, n°94, p.44. http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/94-septembre-2014.pdf

ANNEXE 1 : EVALUATION DIAGNOSTIQUE

Types de tâches		remarques	G	M	F	O
Calculer une suite d'opérations	Calcul sans réorganisation des termes	Nature et nombre des opérations (que des +, que des x ou mélange avec – et /) Nature des nombres		Ex1B		
	Calcul réfléchi avec réorganisation des termes			Ex1A		
	Calcul avec réécriture d'une addition réitérée					
Compléter une opération à trous	Présentée en ligne	Dans un contexte de calcul d'aire ou de périmètre				
	Présentée en pyramides					
	Présentée en colonnes					
Calculer le résultat d'un programme de calcul		Ecriture des opérations en étapes ou en ligne	Ex3.1 Ex3.2 Ex3.3		Ex4.1	
Remonter un programme de calcul		Remonter un programme de calcul peut mener ou non à une équation suivant le programme	Ex4.1		Ex4.2	
Résoudre des problèmes additifs et ou multiplicatifs	Réunion	Avec réécriture ou non En ligne ou pas à pas Congruence sémiotique ou non Y compris associer la bonne opération ou suite d'opérations à un problème Nature des nombres, conversions		Ex4.1		
	Transformation(s)			Ex2b		
	Comparaison		Ex1.1 Ex1.2 Ex1.2			Ex3
	Proportionnalité			Ex2a	Ex3 Ex5	Ex1 Ex4
	Mélange (étapes)				Ex2	
	Deux inconnues			Ex4.2		
	Sens de l'énoncé, données			Ex2		Ex2 Ex4
Résoudre des problèmes sur aire et périmètre	Calculer	Utilisation d'une formule ou calcul à partir des figures Calculs en ligne ou pas à pas	Ex2.1 Ex2.2	Ex3.2	Ex6	Ex9 Ex10
	Trouver une longueur manquante		Ex2.3			
	Produire une formule générale			Ex3.1	Ex7 Ex8	
Associer plusieurs registres		Langue naturelle ou structure, écriture numérique, écriture algébrique, géométrie et grandeurs, programmes de calcul, tableau				
Traduire dans un autre registre	Traduire pour exprimer					
	Traduire pour calculer			Ex1C	Ex1	Ex5 Ex6 Ex7 Ex8
Repérer des suites logiques						
Associer des écritures équivalentes	numériques	Nombres équivalents, opérations donnant le même résultat Travail du signe égal				
	algébriques					
Substituer une valeur numérique à une lettre						Ex9 Ex10

ANNEXE 2 : QUESTIONNAIRE POUR L'ENTRETIEN INDIVIDUEL

1. Qu'est-ce que tu entends par évaluer ?
2. Tu évalues quoi, quand, de manière formelle et informelle ? (ouvrir à autre chose que l'évaluation sommative ou le support papier)
3. Comment et quand élabores-tu ces évaluations ?
4. Quelles informations tu récupères pour toi de ces évaluations et quelle exploitation tu en fais éventuellement ?
5. Quel retour est fait aux élèves éventuellement ? (quelle information est transmise aux élèves et comment)

LA NUMERATION DECIMALE DE POSITION A L'ECOLE PRIMAIRE. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR LE DEVELOPPEMENT D'UNE RESSOURCE

Frédérick TEMPIER

Université Cergy-Pontoise, LDAR

frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé

Cette recherche étudie la prise en compte du principe décimal de la numération lors de l'introduction des nombres supérieurs à mille, en troisième année d'école primaire. En nous appuyant sur les cadres de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques, nous avons d'abord construit une organisation mathématique de référence et une situation fondamentale de la numération, pour étudier les différentes étapes de la transposition didactique. Un premier résultat est le constat d'un manque de prise en compte du principe décimal de la numération de position dans les manuels et programmes actuels ainsi que dans les pratiques. Notre étude se poursuit par la détermination de conditions que devrait vérifier une ressource pour aider les enseignants à améliorer la prise en compte de ce principe. Pour cela nous utilisons la méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource visant à étudier à la fois la pertinence des situations construites et leur adaptabilité à l'enseignement ordinaire. Différents cycles de conception-usage sont prévus : élaborer une première version, analyser son utilisation par des enseignants, l'adapter en une seconde version, etc. Les résultats de l'étude concernent la pertinence des situations et leur appropriation par les enseignants.

Mots clés

Numération, nombre entier, école primaire, ressource, ingénierie didactique, enseignant.

INTRODUCTION

Dans cette thèse (Tempier 2013), je m'intéresse à l'apprentissage de la numération écrite chiffrée, qui est une notion essentielle pour les mathématiques de l'école primaire. Elle s'appuie sur deux principes qui sont indissociables : un principe décimal selon lequel chaque unité de numération est définie comme étant égale à dix unités de l'ordre inférieur et un principe de position définissant le rang d'écriture de chaque unité dans l'écriture chiffrée (EC).

L'apprentissage de la numération pose des difficultés aux élèves que ce soit pour les nombres à deux chiffres ou pour les nombres plus grands. S'approprier la signification de l'écriture en chiffres demande dans un premier temps de comprendre la notion d'*unité* (Fosnot & Dolk 2001, Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2010, Houdement et Chambris 2013), à la base des systèmes de numération, c'est-à-dire l'idée que dix peut former un tout, une nouvelle unité, la dizaine, dont on écrit le nombre au deuxième rang (à partir de la droite). Or beaucoup d'élèves ne font pas le lien entre le deuxième chiffre de l'EC et la quantité correspondante. La dizaine fait référence uniquement à une position (Ross 1989, Kamii & Joseph 1988, Thompson & Bramald 2002, Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2010). Et comme l'a montré Mounier

(2010), la numération parlée peut ne pas être une aide pour l'apprentissage des règles de fonctionnement de la numération écrite.

Pour les nombres supérieurs à cent, de nouvelles relations entre les unités apparaissent. Par exemple la centaine peut être interprétée à la fois comme cent unités ou encore dix dizaines (Fuson et al. 1997, Thanheiser 2009). Le nombre 123 peut alors être considéré comme 123 unités (simples), 1 centaine 2 dizaines et 3 unités ou 12 dizaines 3 unités. Le dernier type de décomposition semble plus difficile à acquérir car la numération parlée n'aide pas puisqu'on ne dit pas « douze-dix-trois » à l'oral (Brissiaud 2005).

On peut recenser de nombreuses difficultés relatives à l'appropriation du principe décimal dans les travaux de recherches sur les nombres supérieurs à cent, comme par exemple :

- difficulté à s'approprier les relations entre unités et interpréter une écriture chiffrée en lien avec ces unités (Bednarz et Janvier 1984, DeBlois 1996)
- difficultés à généraliser des relations entre unités malgré une connaissance de groupements matériels (DeBlois 1996, Thomas 2004).

Ces relations entre unités peuvent pourtant être utiles pour comprendre les techniques de calcul posé des quatre opérations. La tâche de conversion entre unités, comme par exemple écrire 30 centaines en milliers ou inversement, qui pourrait permettre aux élèves de mieux s'approprier les relations entre unités, a disparu à partir des années 1980 environ (Chambris 2008), remplacée en partie par le type de tache *nombre de,* qui en est un cas particulier (« quel est le nombre de centaines dans 3280 ? » par exemple).

Tout cela m'a amené à chercher à mieux comprendre l'enseignement de la numération actuel en France concernant en particulier la prise en compte de ce savoir essentiel qu'est le principe décimal et à essayer d'étudier des conditions pour tenter d'améliorer l'existant.

1. PROBLEMATIQUE, CADRE THEORIQUE, METHODOLOGIE

Ma problématique peut s'énoncer selon deux axes :

- préciser ces premiers constats sur la façon dont est pris en charge le principe décimal de la numération dans les programmes et manuels actuels ainsi que dans les classes,
- étudier des possibilités pour amener les enseignants à mieux prendre en compte le principe décimal dans leur pratique en utilisant une ressource.

Un enjeu de la thèse est aussi de concevoir une ressource pour l'enseignement ordinaire qui soit à la fois :

- utile, c'est-à-dire qui permette aux enseignants de s'approprier les enjeux de l'enseignement de la numération et aux élèves de construire les connaissances visées,
- utilisable par les enseignants, donc compatible avec leurs pratiques,
- et acceptée par les enseignants.

Pour aborder cette double problématique j'ai fait le choix de restreindre mon objet d'étude à l'enseignement de la numération en classe de CE2, lors du travail sur les nombres à quatre chiffres, car il y a de nombreuses relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs et donc de nombreuses décompositions de nombres possibles. De plus, c'est une étape essentielle avant d'aborder les grands nombres et les décimaux.

Pour mon premier axe de recherche j'utilise principalement la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard 1999, Bosch et Chevallard 1999). Elle s'avère bien adaptée puisqu'elle permet d'étudier des praxéologies mathématiques à la fois du côté de l'institution didactique ainsi que celles mises à l'étude dans les classes. La notion de transposition didactique (Chevallard 1991) permet, dans ce cadre, de rendre compte des phénomènes de transformations des savoirs depuis leur production jusqu'à leur enseignement, ce que l'on peut résumer par ce schéma de Bosch et Gascon (2005) :

Figure 1 : schéma de la transposition didactique

Elle permet aussi d'éclairer certains aspects des pratiques des enseignants en prenant en considération leur assujettissement aux praxéologies institutionnelles. Mes premières questions concernent alors la prise en compte du principe décimal de numération aux différentes étapes de la transposition didactique.

Pour le deuxième axe de recherche je m'appuie principalement sur la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau 1998). Elle fournit des outils pour concevoir et étudier des situations à usage didactique (notamment situation fondamentale, milieu, variables didactiques) ainsi que leur réalisation en classe en appui sur les couples contrat/milieu et dévolution/institutionnalisation. Dans ce cadre les questions portent à la fois sur les situations permettant de mettre en scène les savoirs visés et sur leur description dans une ressource. En particulier se pose la question des éléments essentiels des situations qu'il faut décrire aux enseignants pour en permettre une gestion adaptée. Pour cela je m'appuie sur la méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource, définie par Perrin-Glorian (2011). Ce qui fait la spécificité de cette ingénierie par rapport à une ingénierie pour la recherche est le fait de considérer deux niveaux d'étude : celui des situations et de leur validité et celui de la conception d'une ressource pour les enseignants.

On peut résumer la méthodologie générale de la thèse par le schéma suivant.

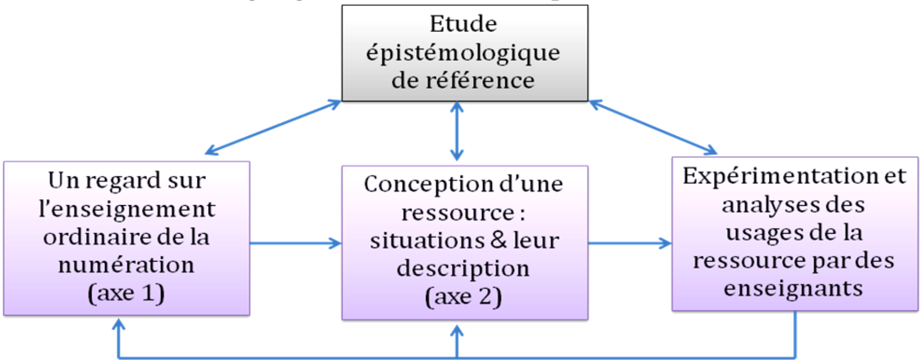


Figure 2 : schéma général de la méthodologie

On peut y voir les relations entre les deux axes de recherche qui s'enrichissent l'un l'autre : l'étude de la transposition didactique sert de point d'appui pour la conception d'une ressource afin que cette ressource s'insère au mieux dans les pratiques des enseignants. Et réciproquement les analyses effectuées suite à l'expérimentation de la ressource par différents enseignants permettent de préciser les constats sur l'enseignement de la numération dans les classes et des contraintes institutionnelles.

J'utilise une méthodologie par cycles pour l'ingénierie. Il est en effet essentiel de réaliser des allers-retours entre phases de conception de la ressource et phases de mise à l'épreuve de la pratique.

Que ce soit en TAD ou en TSD l'étude de l'enseignement ordinaire de la numération ou la conception de situations nécessitent de se donner un point de vue épistémologique. Cela se fait respectivement par la recherche d'une Organisation Mathématique de référence en TAD (Bosch & Gascon 2005) et d'une Situation Fondamentale en TSD (Brousseau 1998, Bloch 2005, Bessot 2011). La situation fondamentale permet d'enrichir le modèle de l'OM de référence en fournissant des raisons d'être à certains types de tâches de cette OM.

2. UN REGARD SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION

Une première partie de mon travail a consisté à chercher à se donner un regard sur l'enseignement actuel de la numération.

Les données de l'étude

Je me suis appuyé sur différents types de données pour étudier les différentes étapes de la transposition didactique. Pour l'OM apprise, j'ai proposé une évaluation sur les nombres à trois chiffres en début d'année de CE2 afin de faire le point sur les connaissances des élèves avant d'aborder le travail sur les nombres à quatre chiffres. Entre 103 et 187 élèves ont passés les différents items. Pour l'OM à enseigner je me suis appuyé sur les programmes officiels depuis 2002, les évaluations nationales CE2, 6ème et CM2, ainsi que sur quatre manuels scolaires de CE2. Pour l'OM enseignée, j'ai mené une étude de cas de trois enseignants de CE2 sur le travail sur les nombres à 4 chiffres, sans intervention du chercheur. Il s'agissait d'étudier à la fois leur projet de séquence (à travers l'OM locale qu'ils concevaient) ainsi que la mise en œuvre de séances dans la classe. J'ai analysé en particulier les séances susceptibles de mettre en jeu le principe décimal, si possible.

L'OM de référence

Pour faire ces analyses je me suis appuyé sur l'OM de référence. La recherche d'une OM de référence commence d'abord avec la recherche d'une théorie de la numération qui soit adaptée à l'écologie des savoirs à l'école primaire. Je me réfère à la théorie « classique » mise en avant par Chambris (2008), construite de façon itérative et qui utilise l'ostensif unités de numération. Il présente l'intérêt de besoins trophiques peu élevés (par rapport aux puissances de dix) ainsi qu'une valence instrumentale pour les conversions. Le travail s'est poursuivi par la recherche d'une situation fondamentale de la numération pour étudier des mises en fonctionnement de ces savoirs.

L'OM régionale de la connaissance des nombres entiers peut se découper selon trois OM locales, en lien avec notre situation fondamentale : l'OM_{card} et l'OM_{ord} pour les types de tâches mettant en jeu le nombre sous ses aspects cardinaux et ordinaux et l'OM_{trad} pour les types de tâches mettant en jeu des traductions d'écritures. Cette OM_{trad} est constituée de trois pôles : les traductions canoniques d'écriture, les conversions entre unités et les traductions générales d'écritures. Ces dernières permettent de mettre en jeu à la fois la position des unités dans l'EC et les conversions entre unités et permettent ainsi l'articulation de ces deux pôles de l'OM_{trad}. Il s'agit d'un type de tâche complexe. Par exemple, comment recomposer 3 milliers 27 centaines 1 unité ? La technique qui consiste à juxtaposer les nombres de chaque unité nécessite d'abord la conversion de 27C en 2M 7C[1], puis l'association du nombre d'unités obtenu à chaque ordre à leur rang avec écriture d'un 0 au rang des centaines, pour obtenir finalement l'écriture 5701.

Cette technique s'appuie sur trois conditions sur l'écriture en chiffres : respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité, ce qui peut nécessiter d'utiliser le chiffre 0 pour marquer l'absence d'unités isolées et présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang, ce qui peut nécessiter de faire des conversions entre unités.

[1] Nous utilisons les abréviations M, C, D et U (parfois m, c, d et u) pour désigner respectivement les milliers, centaines, dizaines et unités.

Résultats de l'étude de la transposition didactique

Les difficultés des élèves pour les nombres à trois chiffres

Pour recomposer une écriture en unités de numération (EUN) en écriture en chiffres (EC), les résultats de l'évaluation sont très variables. Ils dépendent de l'ordre de présentation des unités, de l'absence éventuelle d'unité d'un certain ordre ou du nombre d'unités qui peut dépasser dix, ce qui met en jeu des conversions. Cela m'a amené à mettre en évidence le fait que certaines erreurs des élèves correspondent en fait à différentes techniques de juxtaposition des nombres mais ayant une portée limitée car elles ne prennent pas en compte les trois conditions énoncées précédemment. Par exemple la technique de juxtaposition avec respect de l'ordre des unités amène les élèves à écrire que 8d + 2c + 5u = 285 mais 6c + 9u = 69.

Traductions d'une écriture en unités de numération en écriture chiffrée	1c + 9d + 3u = …	91%
	8d + 2c +5u = …	78%
	6c + 9u = …	65%
	5c +12d +3u = …	39%
Conversion entre unités	1 centaine = … dizaines	48%
	60 dizaines = … centaines	31%
Nombre de	Dans 764 il y a … dizaines	39%

Figure 3 : pourcentages de réussite à certaines tâches de l'évaluation, en début d'année de CE2 (octobre/novembre).

Convertir entre unités et déterminer le nombre de dizaines dans un nombre à trois chiffres sont des tâches difficiles pour les élèves. La simple relation entre 1 centaine et 10 dizaines n'est connue que par la moitié des élèves et moins d'un tiers des élèves réussissent à convertir 60 dizaines en centaines.

Ces résultats sont à même d'interroger les connaissances des élèves avant d'aborder le travail sur les nombres à quatre chiffres, alors que les relations entre unités vont se complexifier du fait de l'introduction d'une unité supplémentaire : une bonne partie des élèves ne sont pas dans des conditions favorables pour aborder ce travail.

Les programmes et manuels récents

Dans tous les manuels étudiés, l'OM_{card} apparait comme une raison d'être de l'étude de la numération. On trouve des problèmes de dénombrement ou de comparaison de collections. On peut noter une absence d'activités effectives de groupements ou d'échanges avec des objets matériels, ce qui pourrait être lié à la taille des nombres en jeu. Dans trois des manuels étudiés, le travail est ensuite centré sur OM_{trad} et OM_{ord}. Il y a une place importante accordé à deux types de tâches relevant de ces OM dans les programmes et les évaluations nationales récentes. Ce sont écrire/nommer (associer écriture en chiffres et en lettres) et comparer (des nombres écrits en chiffres). Ils mettent en jeu principalement le principe de position de la numération.

Dans les programmes de 2002 à 2008 il n'est pas fait référence aux conversions entre unités. Il en est de même dans tous les manuels étudiés pour les nombres à quatre chiffres. Il n'y a donc pas de travail spécifique de conversions entre unités à l'intérieur de l'OM_{trad}.

Cependant les conversions peuvent être en jeu dans d'autres types de tâches comme les décompositions/recompositions non canoniques ou le *nombre de*. C'est ce que nous allons maintenant regarder.

<u>Pour le type de tâches décomposer/recomposer</u>, il y a une évolution dans les textes des programmes de 2002 à 2008 puisque l'on passe d'une préconisation de *divers* types de décompositions/recompositions selon les puissances de dix, mettant en jeu le principe décimal à une absence des décompositions/recompositions dans le programmes de 2008.

Dans les manuels, j'ai relevé une variété importante dans le traitement de ce type de tâche. Dans un manuel il n'est pas travaillé, dans deux manuels sont proposées seulement des décompositions canoniques, dans le dernier, *ERMEL*, on trouve divers types de décompositions y compris en unités de numération. D'ailleurs *ERMEL* fournit un terrain propice à un travail sur les conversions entre unités du fait des situations proposées et du choix des variables didactiques. Pourtant dans cet ouvrage, comme dans les autres manuels, les trois conditions de la technique de juxtaposition ne sont pas explicitées ou bien sont prises en charge par le tableau de numération. Par exemple quand il s'agit de recomposer 24D 5C 8U : dans les commentaires du guide, les auteurs semblent attendre plutôt des techniques relevant du calcul ou de l'utilisation du tableau de numération, sans que les conversions, ici de 24d en 2c 4d) ne soient explicitées. Dans le tableau de numération c'est le fait d'écrire un seul chiffre par colonne qui amène à placer le 2 dans la colonne des centaines quand on écrit 24 dizaines. Finalement, dans les programmes et les manuels, le type de tâches décomposer/recomposer n'apparaît pas comme un point d'appui pour travailler les relations entre unités.
<u>Le type de tâche *nombre de*</u> dont on pouvait trouver une référence dans les commentaires des programmes de 2002 disparaît dans le texte des programmes de 2008. Il est présent dans tous les manuels étudiés mais avec des traitements variés au niveau des techniques et éléments technologiques. Il n'est jamais expliqué le lien avec les conversions entre unités, comme par exemple dans 1234 il y a 12 centaines car 1M = 10C. Dans le manuel *J'apprends les maths* on peut voir une justification que l'on peut rapprocher des conversions mais toujours contextualisée au matériel de numération utilisé : « dans une caisse il y a dix valises ». Ce type de tâches *nombre de* n'apparaît donc pas non plus comme un point d'appui pour travailler les relations entre unités dans les programmes et la plupart des manuels.

Les pratiques d'enseignement de la numération : une étude de cas

Je vais évoquer rapidement ici les pratiques de deux des enseignants observés. Pour ces deux enseignants, le principe décimal n'est pas un enjeu d'enseignement, ce qui se traduit de différentes manières : par le projet construit par les enseignants qui ne contient quasiment pas de tâche mettant en jeu les relations entre unités, par la gestion des tâches qui les mettent en jeu et par l'interprétation faite des erreurs des élèves.
Dans une classe, la seule tâche mettant en jeu des relations entre unités n'est pas gérée pour faire émerger ce savoir. Les élèves ont à disposition des étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, $\boxed{1000}$ et ils doivent recomposer les nombres suivants :

8c 4d 3u = …, 32d = …, 13c = …, 12c 8d 1u = …, 14c 2u = …, 12c 11d 2u =…

Pour les 5 premiers cas, les élèves se contentent de juxtaposer les chiffres sans utiliser le fait que 10 centaines = 1 millier. Cependant pour le dernier cas ce n'est plus possible car cela aboutirait à la réponse erronée 12112. Aucun élève ne trouve la solution et cela pose de réels problèmes de gestion de la mise en commun. L'utilisation des étiquettes aurait pu aider les élèves à échanger dix étiquettes 10 contre une étiquette 100, mais l'enseignant préfère amener les élèves à effectuer un comptage de cent en cent, dix en dix et un en un à l'oral. Cette approche par l'utilisation de la comptine numérique orale s'appuie sur une conception ordinale qui ne met pas en jeu de relations entre unités : par exemple le passage de « neuf-cents » à « mille » ne s'appuie pas sur la connaissance de la relation 10 centaines = 1 millier.
Dans une autre classe, une tâche mettant en jeu des relations entre unités est proposée en évaluation dans un exercice de recomposition pour lequel les deux cas de la dernière ligne mettent en jeu des relations entre unités :

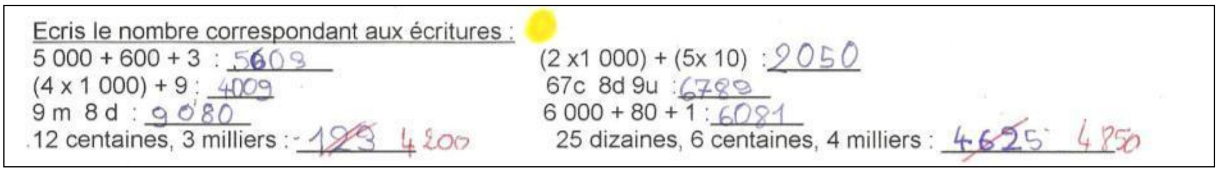


Figure 4 : une production d'élève (évaluation finale de la séquence)

Quand j'interroge l'enseignante sur les difficultés rencontrées par certains élèves dans cet exercice, elle explique les choix qu'elle a effectués :

> « On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors je n'avais pas mis de centaines ou voilà + Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait »

Les variables indiquées par l'enseignante ne correspondent pas à celles qui permettent de mettre en jeu les relations entre unités (ici il s'agit du fait d'avoir des nombres à deux chiffres pour certaines unités) et les erreurs sont interprétées comme des erreurs d'inattention et non en référence aux savoirs en jeu.

Tout cela peut être mis en relation avec les contraintes institutionnelles et l'absence d'enjeu d'enseignement des relations entre unités, ce qui nous amène à nos questions concernant les conditions pour enrichir les pratiques.

3. CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMERATION

J'ai d'abord été amené à faire certains choix généraux en m'appuyant sur des résultats de recherches portant sur l'usage des ressources par les enseignants de l'école primaire voire plus généralement sur leurs pratiques.[2]

Choix généraux pour la ressource

La ressource est à destination des enseignants. J'y propose des situations à usage didactique. Il n'est pas visé un suivi pas à pas par l'enseignant : les usages seront nécessairement variés. Je décris donc les éléments qui semblent essentiels pour une mise en œuvre adaptée par l'enseignant. La détermination de ces éléments essentiels des situations fait partie des questions de recherche.

Une place importante semble devoir être faite à la description des enjeux de savoir du fait de contraintes institutionnelles actuelles qui peuvent amener les enseignants à se centrer sur les activités proposées aux élèves sans toujours se préoccuper des savoirs qu'elles pourraient permettre de faire émerger.

Des éléments sont proposés pour aider l'enseignant à construire une séquence à partir des situations proposées car les ressources ne permettent pas toujours aux enseignants de s'approprier les progressions sur un thème donné ou plus généralement sur l'ensemble des mathématiques travaillées dans l'année. Pour la numération il semble en particulier essentiel que les enseignants soient conscient de la mise en jeu des savoirs dans d'autres thèmes mathématiques de l'école comme le calcul posé. D'autres apports généraux sur l'enseignement de la numération peuvent être proposés. La détermination des principaux apports fait aussi partie des questions de recherche et sera affinée à partir des besoins des enseignants révélés par les expérimentations.

Enfin, il faut motiver les enseignants à utiliser la ressource en leur montrant l'intérêt qu'ils

[2] Les résultats de ces recherches sont rappelés dans le chapitre 5 de la thèse. Nous n'y revenons pas ici.

peuvent y trouver. Cela peut se faire en pointant les manques au niveau des savoirs de numération observés dans certains manuels ou l'importance de la numération pour le calcul posé. Mais cette entrée par les savoirs pourrait ne pas suffire. Il est important de s'appuyer également sur les difficultés des élèves, notamment pour les tâches mettant en jeu le principe décimal de la numération.

Recherche d'une situation fondamentale pour la numération

Pour la situation fondamentale je m'appuie sur le cas où la fonctionnalité recherchée du savoir ne concerne que certaines propriétés, comme dans Bloch (2005).
Je prends appui sur la situation fondamentale du nombre de Guy Brousseau qui constitue le jeu 0 : un actant A et un actant B doivent se communiquer des informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes mais les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps. Mais je ne considère que le cas de collections ayant au moins cent (voire mille) éléments et j'impose que le code de désignation utilisé soit l'écriture en chiffres.

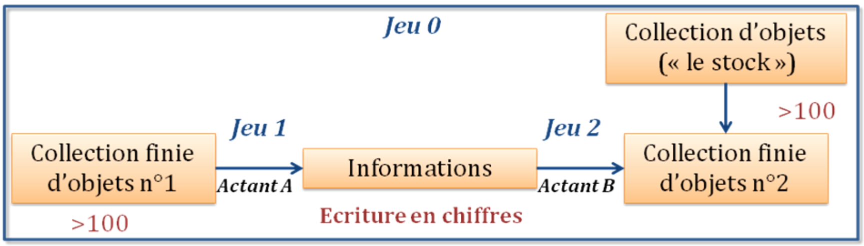


Figure 5 : Jeux 1 et 2 de la situation fondamentale

J'ai montré qu'une variable didactique essentielle est l'organisation de la collection (en vrac, totalement groupée ou partiellement groupée). Le jeu sur cette variable peut permettre de mettre en jeu différentes connaissances liées aux deux principes de la numération.
J'ai aussi montré l'intérêt de décrire la quantité de la collection avec les unités de numération et de considérer les jeux 3 et 4 de traduction d'écritures pour mettre en jeu le principe décimal. Il s'agit alors de passer d'une écriture chiffrée à une écriture en unités de numération ou réciproquement. On retrouve les décompositions/recompositions de l'OM de référence.

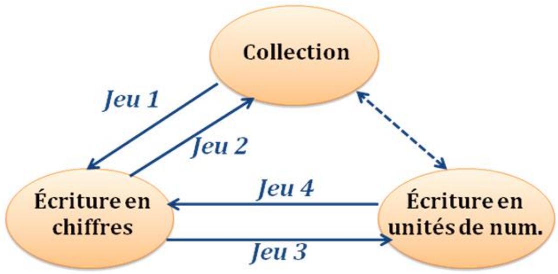


Figure 6 : Les 4 jeux de la situation fondamentale

Mise en scène de la situation fondamentale dans la ressource

J'en viens maintenant aux choix de mise en scène de cette situation fondamentale dans la version 1 de la ressource[3].
Concernant la progression générale, j'ai choisi de partir des jeux 1 et 3, c'est à dire de la situation de dénombrement, avant de proposer les jeux 2 et 4, la situation de commande.

---

[3] La ressource est disponible en ligne (http://numerationdecimale.free.fr). C'est la version 3 qui est actuellement en ligne (le 24/04/2015).

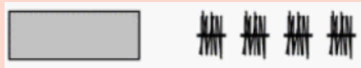
Dénombrement de collections (mise en scène des jeux 1 et 3)	D1 : Dénombrer une collection « en vrac »	
	D2 : Dénombrer une collection totalement groupée	
	D3 : Dénombrer une réunion de deux collections	1ère collection : 2M 8C 1D 3U 2ème collection : 4C 1M 2U. Nombres paris : 31215, 3215, 3315, 4215
Commande de collections (mise en scène des jeux 2 et 4)	C1 : Commandes de bûchettes	Il nous faut 2615 bûchettes, mais le marchand n'a plus de bûchettes par millier. Combien faut-il commander de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?
	C2 : Commandes de timbres	Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ?

Figure 7 : tableau récapitulatif des situations proposées dans la ressource

Pour la situation de dénombrement il y a trois variantes. Je propose un matériel de référence constitué de bûchettes en bois. La première variante permet la constitution des groupements successifs. La deuxième permet de mettre en jeu le principe de position pour dénombrer une collection totalement groupée comme 1M et 4D par exemple. C'est seulement dans la troisième variante que les conversions entre unités sont véritablement un enjeu car la réunion de deux collections amène à avoir plus de dix unités à certains ordres. Dans l'exemple donné ici en réunissant les deux collections on obtient 12C qu'il faut convertir en 1M et 2C. Il est proposé un jeu des paris pour cette troisième variante, où les élèves doivent choisir un nombre parmi ceux proposés. Cela doit permettre de faire émerger différentes erreurs dans la juxtaposition des chiffres et de donner un enjeu à la phase de discussion collective.

La situation de commande permet de réinvestir les connaissances en partant cette fois de la donnée de l'EC pour produire une écriture en unités de numération en tenant compte de différentes contraintes sur le stock du marchand qui permettent de mettre en jeu les conversions entre unités. Cela est ensuite à réinvestir dans un problème similaire dans un contexte de timbres où il s'agit de déterminer le nombre de plaques de 100 timbres ou de carnets de 10 timbres à commander pour obtenir le nombre de timbres désiré.

Dans ces situations il n'y a pas de travail spécifique sur les conversions entre unités mais les trois dernières variantes mettent en jeu les conversions et constituent donc ce qui m'intéresse tout particulièrement.

On trouvera ci-dessous la page d'accueil de la version 1 de la ressource où on peut voir sur le menu de gauche les trois parties : des apports sur la numération, des propositions de situations (les 2 situations principales avec leurs variantes et des situations complémentaires), des aides pour construire une séquence.

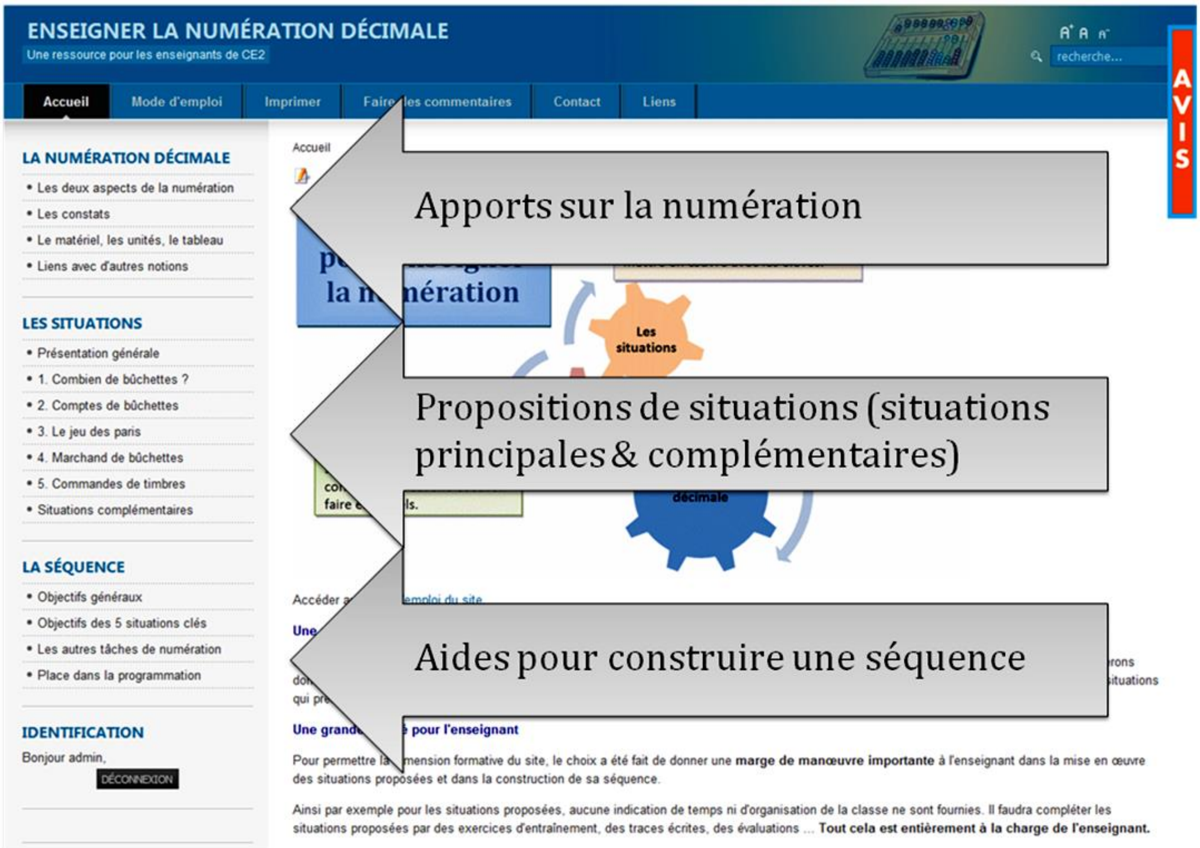


Figure 8 : page d'accueil de la version 1 de la ressource.

4. RESULTATS DE L'EXPERIMENTATION

Quelques précisions sur la méthodologie

Dès le début de mon travail j'ai envisagé une évolution du contrat d'expérimentation. J'ai fait le choix de donner de plus en plus de liberté aux enseignants dans la mise en œuvre des situations pour progressivement s'approcher des conditions « réelles » d'utilisation d'une ressource par des enseignants, hors contexte de recherche.

J'ai commencé par mener une pré-expérimentation avec seulement deux enseignants qui devaient suivre la ressource proposée tout en l'adaptant si besoin. Je ne présente pas ce travail ici.

La version 1 de la ressource, dont je viens d'indiquer les grandes lignes, a fait l'objet d'une expérimentation avec 7 enseignants. J'ai réalisé un entretien avant et un autre après la séquence pour tous ces enseignants. Quatre font partie d'un groupe dit « de travail » qui accepte ma présence dans la classe pour quelques séances et participent à une réunion collective avant et après la séquence. Les trois autres enseignants font partie d'un groupe dit « libre » qui utilise la ressource dans des conditions plus ordinaires. Dans les deux groupes les enseignants doivent faire les cinq situations principales proposées mais il reste à leur charge la construction complète de la séquence avec exercices, traces écrites et évaluations.

Lors de ces expérimentations j'ai fait passer des évaluations aux élèves avant et après la séquence. L'évaluation initiale porte sur les nombres à trois chiffres et l'évaluation finale sur les nombres à quatre chiffres. La comparaison des résultats à ces deux évaluations doit permettre d'étudier les apprentissages éventuels et de s'assurer *a minima* que l'utilisation de la ressource n'a pas d'effet négatif sur les apprentissages.

Expérimentation	*Nombre d'enseignants*	*« Contrat » d'expérimentation pour le suivi de la ressource*	*Nombre de séances observées*	*Evaluations des élèves*
Pré-expérimentation (version 0)	2	Suivi de la ressource proposée avec adaptations possibles.	La plupart des séances mises en œuvre.	Avant/après
Expérimentation (version 1)	**4 (groupe de travail GT) / 3 (groupe libre GL)**	**Suivi des 5 problèmes principaux. Adaptations possibles pour la mise en œuvre.** **Construction d'une séquence à la charge de l'enseignant.**	**3 séances (GT) / aucune (GL)**	**Avant/après**

Figure 9 : dispositif expérimental

Concernant l'analyse des situations, la méthodologie consiste à faire une analyse *a priori* puis, suite à l'expérimentation, une analyse *a posteriori* pour chacune des séances observées. En mettant en relation les analyses des séances réalisées par différents enseignants je fais un retour sur mes hypothèses de départ : les constats effectués dans les analyses correspondent-ils à ces hypothèses ? Si ce n'est pas le cas je cherche à faire des hypothèses les raisons de ces décalages :

- effet de la mise en scène de la situation fondamentale ;
- effet de la description des situations ;
- effets de niveau supérieur : des connaissances professionnelles didactiques des enseignants, des contraintes institutionnelles, ...

Cela m'amène à dire ce qu'il manque, voire à proposer des améliorations de la mise en scène de la situation fondamentale ou de nouveaux choix de description des situations ou encore décrire des besoins pour la formation des enseignants.
Je vais maintenant présenter quelques résultats obtenus concernant les situations (mise en scène de la situation fondamentale et description dans la ressource) et les séquences construites par les enseignants.

La situation de dénombrement d'une collection (variantes 2 et 3)

Pour la variante de dénombrement d'une collection totalement groupée (D2, cf. figure 7) qui met en jeu essentiellement le principe de position, les deux variables didactiques « ordre de présentation des unités » et « présence/absence d'unités isolées à chaque ordre » sont apparues essentielles pour l'apprentissage des élèves pour leur permettre de dépasser des erreurs de juxtaposition des chiffres sans prise en compte de la position des unités. De plus, les élèves dépassent ces erreurs dans toutes les classes observées, malgré des mises en œuvre différentes des enseignants.
La variante de dénombrement d'une réunion de collections (D3), comme par exemple dénombrer une réunion de collections composées de : 2M 8C 1D 3U et de 4C 1M 2U, vise l'émergence de conversions entre unités. Comme cela était prévu dans l'analyse *a priori,* quand les élèves ajoutent les unités de même ordre, cela fait apparaître des erreurs de juxtaposition sans prise en compte des conversions qui amènent les élèves à écrire par exemple 31215. Mais, les mises en œuvre dans les classes ne permettent pas l'émergence de la nécessité des conversions entre unités à cause :

- du recours à l'addition posée qui finalement s'avère être plus rapide et moins source d'erreur,

- et aussi du fait des évaluations (Margolinas 1993) des réponses des élèves par les enseignants dans les phases de conclusion. Il n'y a donc pas d'enjeu de validation possible, contrairement à ce qui était prévu.

Au cours des différentes variantes de cette situation de dénombrement devraient apparaître les trois conditions de la technique de juxtaposition. Finalement, les enseignants institutionnalisent les deux conditions liées au principe de position : le respect du rang de chaque unité et la présence de chaque unité dans l'écriture chiffrée. La première à travers le tableau de numération et la deuxième en expliquant parfois le rôle du chiffre 0 pour marquer l'absence d'unité isolée à un certain rang. Ils s'appuient pour cela sur les erreurs des élèves. Par contre la variante 3 n'a pas permis de faire émerger la nécessité des conversions entre unités, qui ne sont donc pas travaillées ni institutionnalisées. Cette absence des conversions risque de compromettre le travail prévu pour la situation de commande, dont l'objectif est de réinvestir ces connaissances pour faire des décompositions variées de nombres.

Concernant les résultats des élèves à l'évaluation finale (figure 9), on peut noter une progression plus ou moins importante pour les recompositions et les conversions par rapport à l'évaluation initiale. Mais les types de tâches mettant en jeu les conversions restent source de difficultés importantes puisqu'ils sont réussis par moins de la moitié des élèves.

Evaluation initiale (nombres à trois chiffres, 103 élèves)	**Evaluation finale (nombres à quatre chiffres, 96 élèves)**
3 dizaines + 6 centaines = … 54%	3 dizaines + 1 millier = … 73%
21 dizaines + 3 centaines = … 21%	12 centaines + 3 milliers = … 47%
60 dizaines = ……… centaines 34%	40 centaines = ……… milliers 49%

Figure 10 : résultats des élèves aux évaluations (avant/après la séquence)

La situation de commande d'une collection

Pour la situation de commande, dans trois classes on peut observer des difficultés importantes chez les élèves pour les commandes avec contraintes. Les erreurs principales sont celles prévues dans l'analyse *a priori :* les élèves ne tiennent pas compte des conversions et cherchent à écrire des nombres à un seul chiffre pour chaque unité, comme dans une décomposition canonique. Par exemple pour une commande de 2615 bûchettes sans millier de disponible des élèves commandent 6C 1D 5U (difficulté à prendre en compte les centaines qui sont dans les milliers). Malgré la description dans la ressource d'une technique de conversion à institutionnaliser, dans trois classes aucune technique « directe » (pour passer de l'écriture chiffrée à l'écriture en unités de numération) n'est formulée. Les enseignants donnent seulement à voir des techniques de vérification des réponses produites par les élèves, ce qui n'était pas le cas pour la situation de dénombrement. Cela permet, certes, de laisser une responsabilité aux élèves pour l'élaboration d'une technique mais aucune technique directe n'est finalement institutionnalisée.

Les résultats de l'évaluation (figure 10) finale témoignent de difficultés résistantes chez les élèves pour la tâche « nombre de ». Il y a globalement peu d'amélioration des pourcentages de réussite par rapport à l'évaluation initiale. Pour le problème donné en contexte les difficultés restent importantes mais il semble que les élèves ont mieux identifié, dans l'évaluation finale, que ce problème relève du nombre de.

Evaluation initiale (nombres à trois chiffres, 104 élèves)	**Evaluation finale (nombres à quatre chiffres, 96 élèves)**
Dans 764 il y a ……… dizaines : 38%	Dans 1052 il y a ……… centaines : 48%
Problème de « nombre de » en contexte : 26 %	Problème de « nombre de » en contexte : 44 %

Figure 11 : suite des résultats des élèves aux évaluations (avant/après la séquence)

Pour illustrer le fait que les enseignants ne font pas émerger une technique pour passer de l'écriture chiffrée à l'écriture en unités de numération, je montre ici un exemple de gestion d'une phase collective par Mme A, suite à la recherche d'une commande de 3167 bûchettes sans millier de disponible.

Un élève propose 31 sachets, 6 paquets de dix, 7 bûchettes seules.
Mme A : « combien de bûchettes dans trente-et-un sachets ? »
Un élève : « trois-mille-cent. »
Mme A écrit : « 31 sachets de 100 -> 3100 ».
Mme A : « combien il y a de sachets dans une boite ? »
Un élève : « dix sachets ».
Un autre élève a fait une commande de 12 sachets ...
Mme A : « combien ça fait de bûchettes ? Combien il y a de sachets dans une boite ? »
L'élève répond « dix » puis comprend que ça fait mille-deux-cent bûchettes.

Mme A ne laisse pas les élèves exprimer comment passer de l'EC de 3167 à la commande de 31 sachets, 6 paquets et 7 bûchettes. On peut aussi constater, lors des vérifications, qu'il y a bien un travail qui est fait autour des relations entre groupements matériels (sachets, boites et buchettes). Cela se fait sous la responsabilité de l'enseignante.

Quels ostensifs pour les conversions entre unités ?

Dans des problèmes mettant en jeu les relations entre unités (D3 et C1) nous avons observé des résistances à une utilisation adaptée des unités de numération par les enseignants. Ces résistances sont de trois types : évitement de l'utilisation des unités pour décrire les groupements matériels, référence prégnante au matériel de numération quand les conversions sont en jeu et absence d'utilisation des unités de numération à l'écrit pour faire des conversions. La première résistance a été observée dans une seule classe, celle de Mme A. Malgré les propositions de la ressource, l'enseignante utilise les expressions « boites », « sachets », etc. pour décrire les groupements matériels. Pourtant elle utilise toujours les unités de numération pour décrire les rangs du nombre écrit en chiffres. Cet extrait montre comment elle revient sur la retenue de l'addition dans le problème D3.

Mme A : huit plus quatre qu'est-ce qui se passe ici dans les centaines ?
Elève : douze
Mme A : on retrouve nos douze sachets sauf qu'est-ce qui se passe ?
Elève : on met une retenue
L'enseignant fini d'écrire l'addition posée au tableau :

Th	*H*	*T*	*O*
1			
1	*7*	*2*	*4*
+ 1	*8*	*1*	*0*
3	*5*	*3*	*4*

Mme A : et bien voilà pourquoi on met une retenue parce qu'on va garder que deux sachets pour les centaines et qu'ici avec nos dix ça va nous faire une boite de mille en plus. […] On comprend mieux maintenant la retenue : c'est notre petite boite de mille en plus.

Dans la classe de Mme A, les unités sont utilisées pour désigner les rangs de l'écriture chiffrée, mais pas les groupements matériels, ce qui empêche les conversions.

Dans les autres classes, les unités de numération sont utilisées pour décrire les groupements, conformément aux propositions de la ressource. Par contre lorsqu'il y a plus de dix unités à certains ordres, l'enseignant fait une référence quasi systématique aux groupements matériels (réels ou dessinés). Par exemple dans la mise en œuvre de D3 dans la classe de Mme B :

> *Un élève (Marc) vient dessiner la réunion des deux collections au tableau (boites de mille, sachets de cent, etc.). L'enseignante demande à cet élève comment on peut trouver le résultat. Face à la difficulté liée à la prise en compte des 12 sachets dessinés au tableau, Mme B demande à un autre élève (Joris) de l'aider « sans lui donner la bonne réponse, juste le mettre sur la voie » :*
>
> Joris : en fait comme t'en as douze, ça fait plus de centaines […] Si t'as dix centaines ça revient à quoi ?
>
> E : qu'est-ce que tu peux faire ? Si t'as dix pochettes qu'est-ce que tu peux faire ?
>
> Marc : ah oui un millier. *L'élève dessine une nouvelle boite au tableau.*
>
> E : Les dix tu vas les mettre dans une boite. Alors enlève-les maintenant les dix que tu as mis dans la boite. Barre-les ou efface-les. Ah. […] Quand on a dix sachets on peut les mettre dans une boite. Et là le problème c'est qu'on n'en avait pas dix, on en avait douze. Donc dès que ça dépasse dix on peut les mettre dans une boite de mille.

Alors que les élèves utilisent les unités à l'oral, l'enseignante reformule en ramenant au matériel et aux actions sur le matériel (mettre dix sachets dans une boite).

Dans les quatre classes on observe le troisième type de résistance, l'absence d'utilisation à l'écrit des unités de numération pour faire des conversions, même si elles sont utilisées à l'oral. Par exemple Mme C n'écrit jamais de conversion (comme 1 millier 2 centaines = 12 centaines), même si elles sont dites ; excepté les conversions basiques comme 1 millier =10 centaines. Mme B raisonne au tableau sur les dessins des groupements sans jamais écrire les conversions. On le voit dans l'extrait précédent quand elle ne poursuit pas à l'écrit l'idée suggérée par Joris : 12 centaines = 1 millier 2 centaines. Quand un autre élève explique ce qu'il a fait pour trouver le nombre total de bûchettes (« sept centaines et trois centaines ça fait dix »), l'enseignante n'écrit pas la conversion associée (7C + 3C = 10C = 1M), mais continue de faire référence au matériel (« j'ai transformé mes sacs, je les ai mis dans une boite puisque j'en ai dix »).

Enfin, trois enseignants sur les quatre observés ne se servent pas du tableau de numération pour les conversions alors qu'ils l'utilisaient tous pour la situation de dénombrement de collections totalement groupées. Le tableau n'est donc pas un instrument pour faire des conversions entre unités. En général, on peut observer que les enseignants appliquent au tableau de numération les mêmes règles que pour l'écriture chiffrée. Par exemple ils écrivent un 0 en cas d'absence d'unité isolé à un rang : pour écrire un nombre comme 2M 3D 5U dans le tableau, un 0 est systématiquement écrit au rang des centaines. Pour les conversions, le seul enseignant qui utilise le tableau ne s'autorise pas à laisser un nombre à deux chiffres dans une colonne : il efface tout de suite, ce qui ne permet pas de laisser une trace de la conversion effectuée. Finalement le tableau de numération a pour fonction principale de montrer le lien entre chaque unité et son rang dans l'écriture chiffrée.

Les séquences des enseignants

Les enseignants des deux groupes (donc 7 au total) avaient à construire une séquence à partir des 5 situations principales proposées dans la ressource.

Concernant les exercices proposés, on observe peu d'exercices de conversions entre unités (deux classes seulement). Le changement de contexte ne semble pas être un enjeu important pour certains enseignants, malgré les préconisations faites dans la ressource. Il est possible que cela soit un effet involontaire du fait d'avoir proposé quatre situations-clés à la suite dans le même contexte, celui des bûchettes. La ressource n'est donc pas une aide sur ce point.

Concernant les traces écrites, il y a des variations importantes entre les enseignants mais globalement on observe le plus de traces écrites sur le principe de position, au début de la

situation de dénombrement. On peut penser qu'il y a une influence forte de contraintes institutionnelles à ce sujet car la ressource proposait pourtant des éléments sur lesquels les enseignants pouvaient s'appuyer pour construire ces traces.
Enfin, pour les évaluations, les trois enseignants qui en ont proposé pendant la séquence s'appuient sur les mêmes que les années passées. Ainsi, certaines ne tiennent pas compte d'une partie du travail réalisé dans cette séquence. On retrouve les types de tâches écrire/nommer, comparer, décomposer de manière canonique, etc. Ce que l'on peut encore interpréter comme un effet d'assujettissement institutionnel.
Enfin, la comparaison des séquences des enseignants des deux groupes expérimentaux suggère qu'il est possible qu'il y ait un effet de l'expérimentation sur la construction des séquences des enseignants. Les enseignants du groupe libre prennent davantage de libertés avec ce qui est proposé dans la ressource, se détachent plus facilement des situations-clés. Les enseignants du groupe de travail cherchent à faire leur séquence tout en testant les situations, ce qui pourrait les amener à surinvestir les situations-clés. Mme F explique par exemple qu'elle a cherché à suivre au plus près de ce qui était proposé.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Tout d'abord, concernant les conditions sur une ressource pour enseigner la numération, voici ce que je peux retenir de mon travail. Pour motiver les enseignants à s'engager dans un travail plus approfondi sur le principe décimal de la numération, il est important de faire le lien avec d'autres notions et de montrer l'intérêt pour le travail sur les décimaux en CM1. Mais l'expérimentation, a aussi montré l'intérêt, même si ce n'était pas pensé pour cela au départ, de l'évaluation initiale. Elle a en effet permis aux enseignants de prendre conscience des difficultés de leurs propres élèves. Une enseignante m'a même expliqué récemment que ce qu'elle avait principalement appris avec ce travail était de mieux reconnaître les difficultés des élèves et de ne pas se satisfaire de la réussite à certaines tâches comme les décompositions canoniques.
Voici des principes que j'ai retenus pour la description de la ressource :

- une présentation claire des objectifs,
- des variantes des situations principales qui guident la progression,
- une description des éléments essentiels des situations,
- des exemples d'exercices d'entraînement et d'évaluation,
- des aides pour l'institutionnalisation,
- des apports pour l'enseignant sur la numération, des prolongements possibles en lien avec d'autres notions.

Concernant la mise en scène de la situation fondamentale, les situations de dénombrement et de commande de collections s'avèrent pertinentes car elles permettent de faire émerger les connaissances prévues. La situation de dénombrement de collections a permis la construction dans les classes de connaissances liées au principe de position. La situation de commandes de collections permet de travailler les décompositions différentes d'un même nombre en unités de numération.
Mais dans les deux situations, j'ai montré certaines résistances des enseignants que l'on peut interpréter comme des conséquences des contraintes institutionnelles, comme par exemple :

- une résistance, quand les conversions sont en jeu, à se détacher du matériel utilisé, à utiliser les unités de numération ;
- à faire travailler et à institutionnaliser les relations entre unités.

J'ai aussi montré certains obstacles liés aux pratiques usuelles des enseignants comme par exemple la gestion des phases de mise en commun qui peut compromettre l'enjeu de validation prévu ou encore l'absence de formulation d'une technique et donc d'institutionnalisation.

Cela m'amène à pointer des questions à approfondir, à proposer des pistes pour améliorer la ressource mais aussi à mettre en évidence des limites d'une ressource.
Les questions à approfondir concerne notamment l'appropriation des conversions entre unités par les enseignants. Comment amener les enseignants à faire formuler (oral/écrit) les relations (avec unités de numération) et à les institutionnaliser dans les deux situations ? Comment amener les enseignants à proposer des exercices de conversions entre unités entre les variantes des situations principales ?
On peut envisager certaines pistes pour améliorer la ressource. Pour la variante 3 de dénombrement, il est possible de proposer le dénombrement d'une collection partiellement groupée (2M 15C 8U) pour amener à faire des conversions entre unités. On peut aussi mettre en avant une écriture en abrégé des unités de numération (U, D, C, M, …) pour faciliter leur utilisation. On peut prévoir une institutionnalisation à plusieurs niveaux : des synthèses de fin de séances mais aussi une reprise sur l'ensemble de la situation de dénombrement, ce qui permettrait de revenir sur les trois conditions de la technique de juxtaposition. Pour la situation de commande, dans un 1er temps on peut limiter les contraintes à seulement « pas de millier ». Une situation de formulation permettrait de contraindre la formulation (ce qui n'est pas le cas dans une phase de formulation d'une situation d'action). Pour éviter une formulation prématurée de la technique de troncature il est alors possible de prévoir d'abord une formulation des conversions, le but étant de faire formuler aux élèves les décompositions obtenues avec les conversions en jeu. Mais cela est-il adapté à une utilisation dans l'enseignement ordinaire ?
Il semble nécessaire de proposer dans la ressource des exemples d'exercices à proposer aux élèves. Notamment des exercices de conversions entre unités. Mais aussi des exercices dans des contextes variés et hors contexte pour le *nombre de*, les recompositions, etc. Enfin, il faut donner une meilleure visibilité au canevas didactique en s'appuyant sur les deux situations principales, dénombrement et commande de collections. Et décrire les variantes qui guident la progression avec le jeu sur l'organisation de la collection mais aussi le jeu sur la variable de contexte : les bûchettes, les cubes, la monnaie, etc. et pas de contexte. Pour illustrer ce dernier point, on trouvera en annexe la page d'accueil de la version 2 de la ressource qui prend en compte ces modifications.
Mais les résistances rencontrées pour la mise en œuvre des situations témoignent aussi des limites d'une ressource. Par exemple concernant les relations entre unités qui sont un nœud de mon travail, on peut identifier des besoins pour la formation des enseignants :

- pour comprendre l'enjeu du travail sur les relations entre unités,
- pour comprendre comment elles interviennent dans le canevas didactique proposé,
- pour comprendre l'intérêt d'entraîner les élèves à faire des conversions dans des exercices,
- pour formuler les conversions (avec les unités de numération) et les institutionnaliser dans les mises en œuvre des séances,
- …

Dans les perspectives, il reste des points sensibles à approfondir pour la mise en scène de la situation fondamentale et pour ses prolongements : le type de tâches convertir entre unités, les décompositions des nombres, le tableau de numération, les prolongements pour l'étude des grands nombres, voire des décimaux, les liens avec le calcul posé et le calcul mental, … Par exemple, concernant le tableau de numération, c'est un ostensif déjà utilisé par les enseignants. Plutôt que de questionner sa présence dans la ressource, on peut s'interroger sur sa place dans la progression ainsi que sur la façon dont on pourrait amener les enseignants à utiliser la valence instrumentale du tableau pour les conversions.
Il est possible d'envisager la poursuite des cycles afin d'avancer sur les questions posées dans la thèse et discuter la pertinence des pistes d'amélioration de la ressource qui ont été proposées. Concernant le dispositif expérimental, nous avons vu que la présence du chercheur pourrait

contraindre la liberté de l'enseignant sur les adaptations de la ressource. De plus j'avais choisi de laisser « parler » la ressource, donc de me mettre un peu en retrait, afin de mieux comprendre ce que la ressource pouvait apporter. Cela présente certaines limites. Par exemple pour les conversions entre unités, cela m'a permis de faire certains constats de manque mais pas de construire avec les enseignants des propositions pratiques pour que les conversions s'intègrent dans leur travail, ce qui pourrait permettre une meilleure appropriation par d'autres enseignants. Il pourrait donc y avoir un intérêt à chercher une véritable collaboration avec les enseignants. La poursuite des cycles n'exige pas la conservation du même type de dispositif expérimental. Des adaptations peuvent être faites en fonction des besoins repérés. Il peut même être envisagé, en progressant dans les cycles, de ne plus prévoir d'observations de classe mais seulement un travail de préparation collaboratif avec les enseignants, tout en continuant d'évaluer les élèves au début et à la fin afin d'avoir un retour sur leurs apprentissages. Il est aussi possible de prévoir d'inclure au dispositif d'autres acteurs de l'enseignement et de la formation : formateurs, inspecteurs, etc.
Enfin, les limites d'une ressource pour combler certains besoins des enseignants que j'ai pointées m'amènent à considérer l'usage possible de cette ressource dans le cadre de la formation des enseignants. Cette ressource (ou une version future) peut en effet être un support pour la formation initiale ou continue des enseignants. Je sais par exemple que des collègues formateurs d'enseignants l'utilisent. Une réflexion pourrait maintenant être menée sur la formation des enseignants sur la numération décimale en lien avec l'usage de cette ressource.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BEDNARZ, N., JANVIER, B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N*, 33, 5-31

BESSOT, A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques. In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques,* Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009 (pp.29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH, I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse pour une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-123

BOSCH, M., GASCON, J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRISSIAUD, R. (2005) Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAMBRIS, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

DEBLOIS, L. (1996) Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(1), 71-128.

FOSNOT, C-T., DOLK, M. (2001) *Young mathematicians at work : Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH : Heineman.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T. P., FENNEMA, E. (1997) Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

HOUDEMENT, C., CHAMBRIS, C. (2013) Why and how to introduce numbers units in 1st and 2nd grades. *Actes du colloque CERME 8*, Manavgat-Side, Antalya – Turkey.

KAMII, C., & JOSEPH, L. (1988) Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic Teacher* 35 (6): 48- 52.

MARGOLINAS, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

MOUNIER, E. (2010) *Une analyse de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROSS, S.H. (1989) Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher,* 36(6), 47-51.

TEMPIER F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7.

THANHEISER, E. (2009) Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigt Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education* 40, 251-281.

THOMAS, N. (2004) The Development of Structure in the Number System. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.305-312). Bergen : Bergen University College Press.

THOMPSON, I., BRAMALD, R. (2002) An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition. *Report for the Nuffield Foundation*. Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.

VAN DE WALLE, J.A., KARP, K.S., & BAY-WILLIAMS, J.M. (2010) *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Seventh edition). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Manuels scolaires

BRISSIAUD R. (2003) J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Paris : Retz

BRISSIAUD R. (2004) J'apprends les maths CE2, livre du maître, Paris : Retz

BRISSIAUD R. (2010) J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Paris : Retz

CHARNAY R. (2011) Cap Maths CE2, manuel de l'élève, Paris : Hatier

CHARNAY R. (2011) Cap Maths CE2, guide de l'enseignant, Paris : Hatier

DEMAGNY C., DEMAGNY JP., DIAS T., DUPLAY JP. (2008) La tribu des maths CE2, livre de l'élève, Paris : Magnard

DEMAGNY C., DEMAGNY JP., DIAS T., DUPLAY JP. (2008) La tribu des maths CE2, Guide du maître, Paris : Magnard

ERMEL (1995) Apprentissages numériques, CE2, Paris : Hatier

ERMEL (2005), Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, Guide pour l'enseignant, Paris : Hatier

Textes des programmes, documents d'applications et évaluations nationales

MEN (2002) Programmes de l'école primaire : BO Hors-série n°1 du 14 février 2002

MEN (2007) Programmes de l'école primaire : BO Hors-série n° 5 du 12 avril 2007

MEN (2008) Programmes de l'école primaire : BO Hors-série n°3 du 19 juin 2008

MEN Direction de l'évaluation et de la prospective, sous-direction de l'évaluation (2005) Evaluations nationales CE2 et sixième.

MEN Direction générale de l'enseignement scolaire (2009) Evaluation nationale des acquis des élèves de CM2.

ANNEXE : PAGE D'ACCUEIL DE LA VERSION 2 DE LA RESSOURCE

ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Une ressource pour les enseignants de CE2

recherche...

ACCUEIL | DÉNOMBRER UNE COLLECTION | COMMANDER UNE COLLECTION | PROLONGEMENTS | EN SAVOIR PLUS

Accueil

Partant d'un constat de difficultés chez les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de notre système de numération écrit, l'aspect décimal, ainsi que d'un manque de propositions à ce sujet dans les manuels courants (en savoir plus), nous proposons un scénario global permettant de travailler les principes de notre numération écrite (position et décimalité) ainsi que des activités pour le mettre en œuvre dans la classe.

Un scénario global

1. Dénombrer une collection

Plusieurs cas à envisager :

Une collection « en vrac » *(avec des objets matériels) : « Combien y a-t-il de bûchettes dans cette collection qui est devant nous ? »*

Une collection totalement groupée *(les unités de numération désignant des groupements d'objets) : « Combien y a-t-il de cubes dans une collection de 3 milliers de cubes, 5 centaines de cubes et 2 cubes seuls ? ».*

Une collection partiellement groupée : *« Quel est le montant en euros d'une somme de 3 milliers d'euros, 12 billets de 100 euros et 4 billets de 10 euros ? »*

Dénombrements et conversions sans contexte : *« 5 centaines + 4 milliers + 7 unités = … ? » ou bien : « 2 milliers + 31 centaines + 7 unités = … ? » ou encore : « 4 milliers = … centaines ? ».*

2. Commander une collection

Plusieurs cas à envisager :

Commandes sans contrainte : « *des bûchettes sont vendues par milliers, centaines, dizaines et unités. On souhaite en commander 2615. Que peut-on commander ? »*

Commandes avec contraintes :

- « le marchand n'a plus de bûchettes par milliers. On souhaite commander 3052 bûchettes. Que peut-on commander ? ».

- « le marchand a des bûchettes par milliers mais il n'en a plus par centaines. Que peut-on commander ? », etc.

- Autres contextes : « Combien faut-il de billets de 100 euros pour payer une somme de 2079 euros ? », etc.

Sans contexte : *Trouver différentes décompositions de 3421 en utilisant les unités de numération (milliers, centaines, …).*

ÉTUDE DIDACTIQUE DE LA REPRISE DE L'ALGEBRE PAR L'INTRODUCTION DE L'ALGORITHMIQUE AU NIVEAU DE LA CLASSE DE SECONDE DU LYCEE FRANÇAIS

Nathalie **BRIANT**

Laboratoire LIRDEF[1], FDE, Université de Montpellier

nathalie.briant@fde.univ-montp2.fr

Résumé

La réforme des lycées en France de 2009 s'est accompagnée d'un changement de programmes en mathématiques. Relativement à la classe de seconde, deux sujets nous questionnent : d'une part, la nouvelle place de l'algèbre, désormais plongée dans le domaine fonctionnel, et d'autre part l'introduction d'une familiarisation avec l'algorithmique. De par l'intérêt de lier ces deux sujets, une étude didactique de la *reprise* de l'algèbre élémentaire en classe de seconde est proposée. En particulier, nous étudions des objets gravitant autour du concept d'équation, objets dont nous cherchons à affiner le sens par le *détour* de l'algorithmique.

Nous situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1992, 1999), nous étudions les conditions et les contraintes de cette reprise, au travers d'une ingénierie didactique mise en place avec la collaboration de trois enseignants.

Nous tirons quelques conséquences de ce travail sur les conceptions des équations chez les élèves, sur les praxéologies algébriques mises en œuvre par les enseignants et sur l'intégration de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques.

Mots clés

Algèbre élémentaire, concept d'équation, résolution d'équation, algorithmique, algorithme, programmation, transposition didactique et informatique, classe de seconde.

Ces actes constituent une synthèse de mes travaux de thèse, soutenue en décembre 2013 à l'Université de Montpellier II. Après avoir introduit mon thème d'études ainsi que les origines et les motivations de ces recherches, j'expose la problématique en y incluant mes hypothèses de recherche, et en explicitant le cadre didactique dans lequel je me situe. Je détaille ensuite la méthodologie de recherche suivie, en insistant davantage sur quelques points précis, comme l'ingénierie didactique élaborée en collaboration d'enseignants de lycée. Puis j'indique les principaux résultats de ces travaux et des éléments de réponse à ma problématique. Ces résultats sont déclinés en deux volets, constitués d'un point de vue élève, en ce qui concerne les apprentissages algébriques et d'un point de vue enseignant, au sujet des enseignements de l'algèbre et de l'algorithmique, ainsi que des possibilités de liens entre ces deux domaines.

[1] Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation. Université de Montpellier.

LES ORIGINES DE LA RECHERCHE ET LES PREMIERES QUESTIONS

Afin d'expliciter les origines de mes travaux, et en considérant le titre de la thèse, j'en extrais trois mots-clefs : *algèbre, algorithmique* et *classe de seconde*, dont j'explicite ici les liens.
Ayant exercé comme enseignante en lycée durant une douzaine d'années, j'ai vécu « de l'intérieur » – par la confrontation avec les difficultés récurrentes des élèves – les nombreux obstacles de l'*algèbre*, obstacles étudiés par moult recherches épistémologiques et didactiques depuis les années 1980. J'ai ainsi souhaité transformé mon questionnement sur ce domaine en tant qu'enseignante en questionnement en tant que chercheuse. En outre, le choix de ce domaine constitue une continuité avec les travaux du LIRDEF, en particulier avec les travaux de Bronner (1997) sur le numérique-algébrique. Pour l'*algorithmique*, sans doute ai-je été influencée par ma formation initiale d'ingénieur physicien, et en particulier par l'enseignement en informatique que j'ai reçu. Ces connaissances m'ont sensibilisée à l'intégration des Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE). Mon passage à l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) dans l'équipe « intégration des calculatrices à l'enseignement des mathématiques » a également contribué à cet intérêt. Le troisième mot-clef « *classe de seconde* », est relatif à un niveau où j'ai longtemps enseigné, et dont le programme a récemment changé avec la réforme des lycées de 2009[2]. Ces changements portent notamment sur l'introduction de l'algorithmique et sur une modification de la place de l'algèbre. De plus, ce niveau de classe a retenu mon attention cat il représente pour chaque élève suivant une filière générale un passage, une classe charnière entre le collège et la série du cycle terminal du lycée qui sera choisie. L'*algèbre* y trouve une place spécifique, puisqu'elle fonctionne comme un verrou d'accès aux études mathématiques et scientifiques. Ainsi ces trois mots-clefs sont-ils à la fois au carrefour de mon parcours personnel et au carrefour de différents éléments d'enseignement qui suscitent un questionnement.

Les changements dans les programmes officiels de mathématiques suite à la réforme des lycées de 2009

Précisons quelques points de la réforme des lycées de 2009. Cette réforme s'est accompagnée de changements de programmes en mathématiques qui concernent, entre autres, le domaine *numérique - algébrique* : la question de la *reprise* (Larguier, 2009) des premiers concepts de ce domaine vus au collège se pose aux professeurs de lycée d'une façon nouvelle, d'autant plus que des changements de programmes au niveau du collège ont également été opérés. Un autre changement institutionnel concerne l'introduction, dans toutes les classes de la voie générale et technologique du lycée, de l'*algorithmique* dans les programmes de mathématiques. Celle-ci est présentée par les auteurs des programmes comme *une formation des élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes.*
À propos de la modification de la place de l'algèbre dans ce programme et sur l'interprétation que j'en fais, la lecture du bulletin officiel de mathématiques de la classe de seconde (MEN, 2009) montre un découpage des savoirs en trois domaines nommés « *Fonctions ; Géométrie ; Statistiques et probabilités* ». L'algèbre n'y apparaît pas comme un domaine[3] à proprement parler. Pour « trouver » l'algèbre, il faut explorer le contenu du domaine *Fonctions.* Le tableau qui suit (cf. figure 1) présente des extraits choisis de ce domaine (MEN, 2009a, p.4) déclinés en contenus, capacités et commentaires, où j'ai indiqué en caractères gras les concepts algébriques à enseigner.

[2] Cette réforme a débuté en classe de seconde en 2009 et s'est poursuivie en classes de première et de terminale en 2011 et 2012

[3] Les termes *domaine, secteur d'étude, thème d'étude* et *sujet d'étude* sont à prendre au sens des niveaux de l'échelle de codétermination didactique de Chevallard (2002).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe	Traduire le lien entre deux quantités par une **formule**. […]	[…]
Étude qualitative de fonctions	[…]	[…]
Expressions algébriques **Transformations d'expressions algébriques** en vue d'une résolution de problème**.**	- Associer à un problème une **expression algébrique**. **- Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression** en vue de la résolution du problème donné. **- Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples**.	**Les activités de calcul** nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, **l'anticipation et l'intelligence du calcu**l. […]
Équations **Résolution** graphique et **algébrique d'équations.**	- Mettre un problème **en équation.** - **Résoudre une équation se ramenant au premier degré.** […]	Pour un même problème, combiner résolution graphique et **contrôle algébrique.** […]
Fonctions de référence Fonctions linéaires et affines […]	**Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.** […]	[…]
Étude de fonctions. Fonctions polynômes de degré 2 Fonctions homographiques	[…]	[…]
Inéquations **Résolution** graphique et **algébrique d'inéquations.**	- Modéliser un problème par **une inéquation.** - Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. **- Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré.** **- Résoudre algébriquement les inéquations** nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : - combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et **d'une résolution algébrique**, - mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. […]
Trigonométrie	[…]	[…]

***Figure 1** – Extraits du domaine "Fonctions" du programme de seconde de 2009*

L'analyse de ce tableau montre que les concepts algébriques sont scindés en différents secteurs qui apparaissent disséminés parmi les secteurs fonctionnels : par exemple, le secteur des *équations* est situé entre *l'étude qualitative des fonctions* et l'étude des *fonctions de référence*. De même, le secteur des *inéquations* se trouve entre l'étude *des fonctions polynomiales et homographiques* et la *trigonométrie*. Remarquons enfin que chacun des secteurs comportant de l'algèbre inclut des thèmes algébriques mais également des thèmes fonctionnels : par exemple, les thèmes « *résoudre graphiquement une inéquation* » et « *résoudre algébriquement une inéquation* » cohabitent dans le secteur des inéquations.

Cette brève étude des programmes nous permet de conclure sur la volonté de la noosphère de considérer l'algèbre dans le *champ conceptuel* (Vergnaud, 1990) des fonctions, mais également de ne pas faire apparaître l'algèbre comme un *domaine*. L'algèbre ne se présente plus comme une branche des mathématiques étudiée pour elle-même, mais comme un *outil* (Douady, 1986) au service des autres branches des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse. Une réelle insistance est faite en ce sens, puisque ces recommandations persistent dans un des documents ressources de la classe de seconde (MEN, 2009b), comme le montre cet extrait :

> Si un certain degré de maîtrise technique est à faire acquérir aux élèves et donc à travailler, il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une

> résolution de problème, le fait d'associer à un problème une formule devant être obtenu des élèves eux- mêmes. […] Toutefois le degré de technicité attendu de certains élèves peut, et doit, rester modeste. Quand la complexité du calcul devient plus grande, ou du moins trop grande pour eux, un recours à des logiciels de calcul formel est possible et est à favoriser. (Op. Cité, p.13)

Je me suis donc questionnée sur la lecture que l'enseignant fait de ces programmes. Comment le professeur de la classe de seconde interprète-t-il la logique des concepteurs des programmes, où l'algèbre est considérée essentiellement comme un outil pour l'analyse ? Parvient-il à *toujours* situer l'algèbre dans la perspective d'une résolution de problème (cf. citation ci-dessus) ? Confronté aux difficultés de ses élèves, n'est-il pas dans l'obligation de s'attarder sur l'algèbre en tant qu'*objet* (Douady, 1986) et de mettre en place ou de reprendre des praxéologies algébriques, en les décontextualisant des contextes des problèmes ?

De la même manière, en me situant du côté de l'élève, je me suis interrogée sur la représentation de l'algèbre que celui-ci va se forger, si celle-ci est essentiellement étudiée au travers de problèmes empruntés à d'autres champs mathématiques et si l'élève utilise des outils de calcul formel qui remplacent la technique et la technologie sous-jacente. Quel degré de variabilité des élèves est observable sur leur capacité à révéler l'algèbre en tant qu'objet par rapport à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'outil ?

Le lien entre algèbre et algorithmique

Ainsi, me posant la question de savoir si cette place de l'algèbre – présentée comme *outil* et particulièrement dans le cadre fonctionnel – est suffisante pour l'enseignement et l'apprentissage de ses concepts, je me suis intéressée à un secteur algébrique particulier, celui des équations polynomiales du 1^{er} et du 2^{nd} degré et de leur résolution.

En effet, vu l'étendue du domaine algébrique, il me fallait circonscrire un secteur de l'algèbre, un secteur qui permette de travailler sur les *objets* eux-mêmes, et également un secteur qui puisse être lié à l'algorithmique, puisque ma volonté était d'intégrer ce domaine à ma problématique et d'en montrer l'intérêt. Je me suis inspirée d'Al Khawarizmi et de son traité « *Al-Kitab al mukhtasar hisab al-jabr wa'l-muqabala* » qui répertorie de façon systématique, algorithmique pourrait-on dire, des méthodes de résolution d'équations du 1^{er} et du 2^{nd} degré.

Pour justifier en quoi l'algorithmique peut apporter une aide à la résolution d'équations, je commencerai par présenter quelques erreurs d'élèves de la classe de seconde[4]. Ces productions ont été choisies pour leur représentativité et leur typicité.

[4] Productions d'élèves relevées dans le cadre de mes travaux de thèse (Briant, 2013)

Équation proposée à la résolution	Production d’élève
$2(x -1) + 5x = 3x + 4 – 2(x + 1)$	$2x - 2 + 5x = 3x + 4 - 2(x+1)$ $7x - 2 \quad\mid\quad x + 2$ $7x - 2 = 0 \quad\mid\quad x + 2 = 0$ $7x = 2 \quad\mid\quad x = -2$ $x = \frac{2}{7}$
$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x = -9$ $x^2 + x = -\frac{9}{6}$ $x^3 = -\frac{9}{6}$
$(3x + 1)^2 - 4 = 0$	$9x^2 + 6x + 3 - 4 = 0$ $9x^2 + 6x = -1$ $3x + \sqrt{6}\,x = -1$ $3\sqrt{6}\,x = -1$ $x = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$

Figure 2 – *Quelques productions d’élèves sur la résolution d’équations polynomiales*

La première production montre une confusion de techniques, l’élève essayant d’appliquer ici la « méthode du produit nul » à une équation du 1^er^ degré. Les deuxième et troisième productions montrent des équations du 2^nd^ degré où les élèves tentent d’isoler l’inconnue *x* dans un membre comme on peut le faire pour résoudre une équation du 1^er^ degré : on trouve ici des concaténations, des fausses linéarités (Grugeon, 1995) ou des conceptions erronées sur les puissances et racines carrées (Bronner, 1997). Ces difficultés ne concernent pas que quelques élèves, comme l’ont montré des recherches antérieures et comme le confirme l’étude que j’ai menée (Briant, 2013) sur la compétence algébrique des élèves en fin de seconde. Les élèves ont certaines connaissances, ils connaissent quelques types d’équations et quelques techniques, mais ils éprouvent des difficultés à déterminer quel type de technique correspond à quel type d’équation.

Pour arriver à ce que les élèves associent type d’équation et type de technique de résolution, l’idée de l’introduction de l’algorithmique pourrait être synthétisée à l’aide d’un organigramme comme celui de la figure 3.

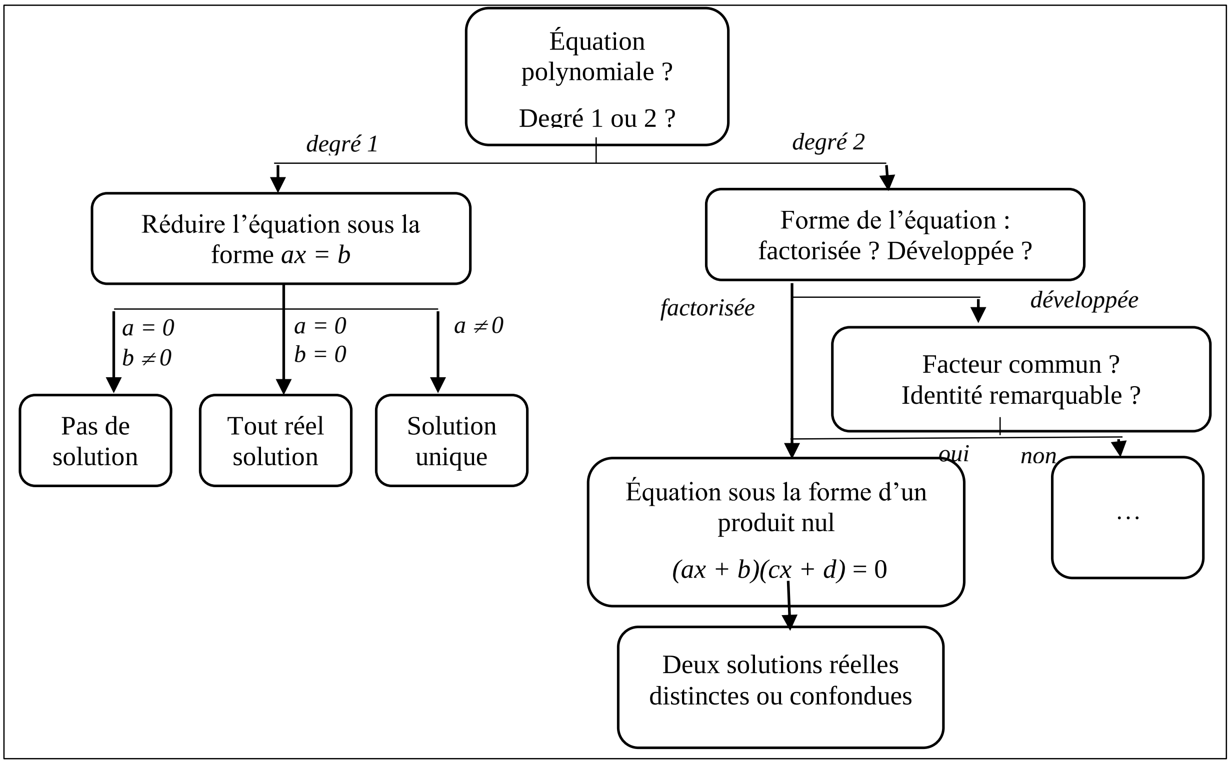


Figure 3 – *Algorithmes de résolution d'équations polynomiales de degré 1 ou 2*

Cet organigramme succinct de résolution des équations polynomiales de degré 1 ou 2 est accessible à des élèves de seconde qui ne connaissent pas encore la technique dite « du discriminant » pour résoudre les équations de degré 2, c'est-à-dire que tout type d'équation du 2nd degré ne peut encore être résolu à ce niveau selon une technique unificatrice. Notons que le schéma de la figure 3 n'est pas à considérer comme un objectif en soi, il figure ici comme illustration d'un schéma mental, résumé des questions que les élèves devraient se poser avant de résoudre une équation, et pendant la résolution. Les quelques productions rapportées en figure 2, sont révélatrices que ce schéma mental fait défaut à un certain nombre d'élèves. C'est ainsi que l'idée de mettre l'algorithmique au service de l'algèbre en tant qu'*outil* est née, avec l'algèbre au cœur de l'utilisation de l'algorithmique, c'est-à-dire l'*objet* sur lequel l'algorithmique opère.

Résoudre une équation du 1er ou du 2nd degré demande de reconnaître une certaine catégorie d'équations, puis d'effectuer un traitement algébrique selon des techniques éprouvées permettant sa résolution. Il s'agit donc, à la manière d'Al Khawarizmi, de *classer* puis de *résoudre* des équations. L'objectif à atteindre est que les élèves, aussi bien en environnement informatisé qu'en environnement papier-crayon, parviennent à catégoriser type d'équation et technique de résolution correspondante.

Il s'agit donc de *reprendre* les équations qui ont déjà été étudiées dans les classes de 4^{e} et 3^{e} au collège en y ajoutant l'algorithmique. Le concept de *reprise* est défini ainsi par Larguier (2005) :

> La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés dans les classes antérieures. La reprise peut alors aller à l'extrême d'un redoublement du temps didactique, et constitue alors un recommencement qui se traduit dans les classes par des rappels ou encore par des révisions ; jusqu'à une « reprise d'étude » et une reprise de l'avancée du temps didactique qui fait apparaître de nouveaux enjeux d'étude et qui est alors une poursuite de l'étude amorcée dans les classes antérieures. (Op. Cité, p.17)

Ce chercheur met l'accent sur deux extrêmes de reprise, soit une reprise à l'identique de connaissances déjà rencontrées, soit une reprise qui permet une avancée du temps didactique en ajoutant aux connaissances anciennes de nouvelles connaissances. Dans ces travaux de recherche, c'est la *reprise* dans ce second sens qui est convoquée, puisque les types d'équations retravaillés sont ceux enseignés au collège, mais que sont *noués ensemble de l'ancien et du nouveau* (Larguier, 2009), par l'ajout de l'étude d'algorithmes et de programmes. Les résultats présentés plus loin montrent comment une avancée du temps didactique s'est faite pour le concept d'équation.

CADRE THEORIQUE, PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

Cadre théorique

Le titre de la thèse annonce que les travaux entrepris se situent à la frontière de différents champs, de différents domaines qui s'articulent entre eux. Il s'ensuit que le travail d'analyse et de synthèse nécessite des outils théoriques issus de plusieurs origines et avec différentes approches. Aussi, afin de modéliser le travail de l'enseignant et celui de ses élèves, en tenant compte des conditions et contraintes qui s'exercent sur eux, j'ai choisi un cadre théorique permettant des analyses autant de niveau macro-didactique que de niveau micro-didactique telle la *théorie anthropologique du didactique* de Chevallard (1985, 1992, 1999). Ce cadre est notamment complété par les travaux de Brousseau (1998) sur la *théorie des situations* pour la création des situations de *l'ingénierie didactique* (Artigue, 1990) mises en place dans l'expérimentation, et que je définis en section suivante. Également les concepts de *champ conceptuel* (Vergnaud, 1990), de la *dialectique outil-objet* (Douady, 1986), et celui de *reprise* (Larguier, 2009) sont convoqués.
Des cadres plus spécifiques relatifs aux domaines de l'algèbre et de l'algorithmique ont également été utilisés. Ainsi pour l'algèbre, mes principales références sont les travaux de Grugeon (1995) sur la *compétence algébrique*, ceux de Sfard (1991, 1994) sur les *conceptions structurale et procédurale* des expressions algébriques, et également les travaux de Bronner (1997) sur l'articulation numérique-algébrique. Pour l'intégration didactique des TICE, je me suis inscrite dans les travaux de Rabardel (1995) sur la *genèse instrumentale*, ceux de Balacheff (1994) sur la *transposition informatique* et ceux d'Artigue (1997) sur la *pseudo-transparence*. Notons que pour l'algorithmique à proprement parler, je me suis basée sur les thèses de Nguyen (2005) et de Modeste (2012), et que peu de travaux de recherche en didactique existent à ce jour dans ce domaine.

Problématique et hypothèses de recherche

La problématique de mes travaux peut se résumer par cette question :
Quelles sont les conditions et les contraintes, côté enseignant et côté apprenant, pour une reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique dans le cadre de la classe de seconde du lycée ?
À partir de cette problématique, quatre hypothèses de recherche ont été déclinées, qui concernent :
- le rapport des enseignants au programme institutionnel, sur la nécessité de considérer l'algèbre, non seulement comme un outil pour résoudre des problèmes mais aussi comme un objet à étudier (hypothèse H1) ;
- le rapport des élèves à la considération des concepts algébriques dans leur dimension objet (hypothèse H2) ;
- l'apport de l'algorithmique liée à la programmation pour l'enseignement et l'apprentissage de

concepts algébriques (hypothèse H3) ;
- l'impact des choix d'organisations mathématiques et didactiques, dans l'expérimentation, sur les possibilités d'apprentissages des élèves (hypothèse H4).
La problématique propose donc d'étudier diverses conditions et contraintes relativement aux élèves, aux enseignants et à l'institution Éducation Nationale, afin d'aborder comment vivent les domaines de l'algèbre et de l'algorithmique,

Méthodologie de recherche

Afin de répondre à cette problématique et d'éprouver mes hypothèses de recherche, j'ai élaboré quatre études :
- une analyse institutionnelle sur l'enseignement des équations à la fin du collège et au début du lycée, conjuguant une analyse des programmes officiels et de manuels de mathématiques ;
- une étude diagnostique des connaissances d'élèves de fin de seconde en algèbre élémentaire ;
- une *ingénierie didactique* en classe de seconde comportant trois *situations* expérimentées dans trois classes de seconde sur la reprise du concept d'équation, en utilisant l'algorithmique ;
- des entretiens des professeurs expérimentateurs à propos des conditions et contraintes de l'introduction de l'algorithmique au lycée sur leurs pratiques, en lien avec l'expérimentation réalisée dans leur classe, en amont et en aval de celle-ci.
Dans cette synthèse, j'axerai mes propos sur l'ingénierie didactique mise en place, en développant plus particulièrement la méthodologie employée. Je ne reviendrai pas ici sur la méthodologie des trois autres études, dont je donnerai simplement quelques résultats par la suite. Précisons tout d'abord les raisons d'être de cette expérimentation.
D'une part, les programmes institutionnels n'incitant pas à mêler algèbre et algorithmique[5], les professeurs ne semblent pas proposer spontanément des situations présentant cette articulation entre algèbre et algorithmique. En particulier, les enseignants ayant participé à l'expérimentation n'inscrivent pas ou peu ce type de situations dans leurs pratiques. Étant donné que mes travaux sont basés sur cette articulation, une *étude clinique* stricte est de ce fait exclue, et il m'est apparu nécessaire de proposer une *ingénierie didactique* où algèbre et algorithmique sont liées. D'autre part, comme je souhaite étudier certains choix d'organisations mathématique et didactique des professeurs expérimentateurs et tenir compte de leurs conditions et contraintes d'enseignement (cf. hypothèse H4), ceci nécessite que l'ingénierie ne soit pas complètement achevée et modifiable sur certains points. C'est ainsi que j'ai développé une expérimentation spécifique, construite de façon collaborative avec trois enseignants de lycée. La collaboration est à prendre dans le sens des principes de la *recherche collaborative* développés par Bednarz et Desgagné (1997, 2005). J'ai choisi ici cette citation de Desgagné (1997) qui explicite en quelques mots cette collaboration, telle que j'ai souhaité la réaliser :

> Le chercheur sollicite des praticiens, parce qu'il croit à une construction de connaissances qui ne peut faire fi ni du contexte réel d'exploration, ni du point de vue de l'acteur praticien en action dans ce contexte. (Op. cité, p.381)

Desgagné et Bednarz ajoutent un regard croisé entre le chercheur et le praticien, qui par une volonté commune de construire des liens, les fait progresser tous deux dans la constitution d'objets *co-situés*, spécifiques, comme par exemple la conception de séquences ou de scénarios d'enseignement. Mais toutes les étapes de l'expérimentation ne sont pas co-construites. La méthodologie suivie se schématise selon la figure 4 et est explicitée ci-dessous.

[5] Une étude des programmes institutionnels des classes du lycée (Briant, 2013) montrent en effet que les *niches* de l'algorithmique sont surtout proposées dans les domaines de l'analyse, de la géométrie et des statistiques et probabilités. Seul le secteur « second degré » du domaine algèbre est cité comme pouvant faire l'objet *d'activités algorithmiques* au niveau du programme des classes de première S et ES (MEN, 2010a-b).

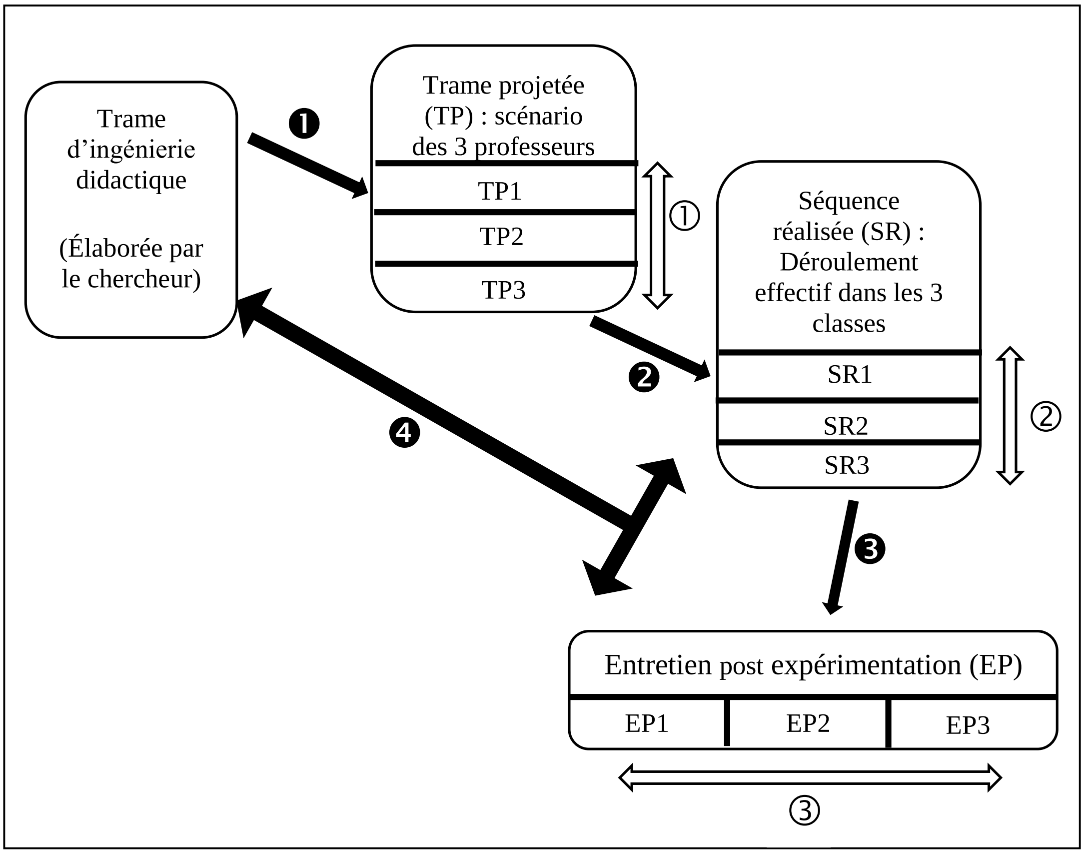


Figure 4 – *Synthèse des phases du dispositif expérimental de l'ingénierie didactique*

Le dispositif expérimental mis en place comporte les phases suivantes :
- une *trame d'ingénierie* élaborée par le chercheur seul, composée de trois *situations* (Brousseau, 1998), permettant de lier le secteur algébrique des équations et l'algorithmique. Cette trame se situe dans le *monde du chercheur*, selon une expression de Bednarz (ibid.), c'est-à-dire correspond à ses préoccupations de recherche. Dans cette trame, des éléments imposés et des éléments modulables des situations sont présents. Par exemple, le fait de travailler les équations avec l'algorithmique et la programmation est imposé mais les organisations mathématiques et didactiques ne sont pas complètement définies : les enseignants peuvent en choisir des éléments comme les exemples d'équations à résoudre, les consignes, les modalités de travail des élèves, le fait de faire ou non une institutionnalisation, etc. ;
- la *trame projetée* consiste en l'adaptation particulière que chaque professeur réalise de la trame d'ingénierie en complétant les éléments modulables. Cette trame projetée est réalisée en collaboration entre le chercheur et chaque enseignant, elle correspond à la *construction d'un objet co-situé* (Desgagné, 1997), objet présentant un intérêt d'étude pour le chercheur et pour les enseignants. Pour le premier, il s'agit d'analyser, par les choix d'adaptation de la trame d'ingénierie, les conditions et les contraintes de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au niveau de la classe de seconde Pour les seconds, il s'agit d'explorer dans leurs classes l'apprentissage de l'algorithmique ou de questionner de façon nouvelle les résultats de leurs élèves dans le domaine algébrique ;
- à la suite de la *trame projetée,* chaque enseignant expérimentateur ajuste seul sa propre séquence, composée de plusieurs séances. Ces séquences sont alors conduites dans les classes de seconde par les professeurs eux-mêmes. Les séquences sont ensuite analysées a posteriori par le chercheur seul ;
- les *entretiens post-expérimentation* sont individuels. Leur objectif principal est l'évaluation par les enseignants du dispositif d'expérimentation mis en place. Cette évaluation s'intéresse

au rapport de chaque enseignant à l'expérimentation, du point de vue de la construction de savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux, du point de vue des programmes, du point de vue de l'élève et du point de vue des praxéologies de l'expérimentation proposées par le chercheur et réellement mises en œuvre par les enseignants. Pour terminer, notons que les flèches noires correspondent à la chronologie des analyses, mettant en rapport les éléments du corpus de données précisés ci-dessus. Quant aux flèches blanches, elles correspondent aux comparaisons effectuées entre les trois trames projetées TP_i ($1 \leq i \leq 3$), les trois séquences réalisées SR_i ($1 \leq i \leq 3$) et les trois entretiens EP_i ($1 \leq i \leq 3$).

Les situations de la trame d'ingénierie et les trames projetées

Afin de mieux comprendre les résultats exposés dans la section suivante, je détaille ici deux points de la méthodologie adoptée. Ces points portent sur la constitution des situations de la trame d'ingénierie et sur quelques éléments de la constitution des trames projetées.
Les trois situations proposées de la trame d'ingénierie se déclinent de la façon suivante : la situation n°1 permet un travail sur la *catégorisation* d'équations de degré 1 et 2, les situations n°2 (équations de degré 1) et n°3 (équations de degré 2) offrent, pour chacune d'elles, deux types de tâches :
- le premier sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée ;
- le second sur la détermination des techniques de résolution de types d'équations reconnues, par le biais de l'algorithmique et de la programmation.

Ainsi, la situation n°1 amène à considérer l'aspect *structural* d'une équation (Sfard, 1991), cet aspect permettant d'identifier globalement à quelle catégorie l'équation appartient, puis l'aspect *procédural* entre en jeu (Sfard, ibid.) lors des situations n°2 et n°3, rendant possible l'application d'une technique de résolution à un type d'équations reconnu. C'est cet enchaînement des deux aspects qui constitue la base de l'*algorithmisation* des techniques de résolution, et qui permet de déterminer des *algorithmes* de résolution des équations, à la manière d'Al Khawarizmi. En effet, considérons la définition donnée par Modeste (2012) d'un algorithme :

> Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (Op. cité, p.25)

Cette définition indique la fonction de celui-ci, avec les termes « *résolution d'une famille d'instances d'un problème* ». En effet, un algorithme sert à décrire les étapes de la résolution d'un problème, où le terme *problème* est à considérer comme un *type de problème*. C'est en ce sens que j'ai considéré la définition d'un algorithme puisque l'objectif principal de ces situations est de montrer aux élèves que la résolution des équations de degré 1 et 2 peut se faire « automatiquement », autrement dit de manière *algorithmisée*. Et ainsi, amener ces élèves à comprendre que la reconnaissance de la nature et de la forme d'une équation leur permet de choisir dans leur catalogue de techniques la technique la plus adéquate pour résoudre l'équation donnée.
Dans la situation n°1, les élèves recherchent une catégorisation des équations proposées du 1er ou du 2nd degré, factorisées ou non, réduites ou non. Un exemple de choix de ces équations, élaboré par l'un des professeurs expérimentateurs est donné en figure 5.

Équation 1 : $1000x = 0$	Équation 11 : $7(x+2) + 4(x-3) = 0$
Équation 2 : $-1000x = 0$	Équation 12 : $(3-4x) - (2x-1) = 0$
Équation 3 : $-1000 + x = 0$	Équation 13 : $(3-4x)(2x-1) = 0$
Équation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$	Équation 14 : $3x(x+\sqrt{5}) = 0$
Équation 5 : $\sqrt{x} + 2 = 3$	Équation 15 : $x^2 = 7$
Équation 6 : $-\frac{x}{5} = 1$	Équation 16 : $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$
Équation 7 : $\frac{-5}{x} = 1$	Équation 17 : $9x^2 - 16 = 0$
Équation 8 : $\pi x + 3 = 4$	Équation 18 : $x^2 - 8x + 15 = 0$
Équation 9 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	Équation 19 : $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$
Équation 10 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$	

Figure 5 *– Choix des équations de la situation n°1 par le professeur Annabelle*

Dans une première phase, les élèves effectuent, en groupes, un travail de recherche de catégorisation de ces équations, puis une phase de mise en commun est réalisée, où les différents groupes affichent leur production au tableau, et un rapporteur commente les classes d'équations formées.

Pour les situations n°2 et n°3, le travail se déroule en salle informatique en binômes, l'organisation est similaire dans les deux cas, les élèves disposant d'un poste informatique et d'une liste d'équations à résoudre, résolution à effectuer en élaborant un ou des algorithmes qui sont ensuite programmés.

Les analyses effectuées reposent sur deux pôles :

- pour le pôle élève, est analysée la reprise des techniques de résolution des équations du 1^er^ et du 2^nd^ degré par l'algorithmique ;
- pour le pôle professeur, ce sont les choix d'organisation mathématique et didactique qui sont analysés. Suit un exemple de ces choix, en figure 6 montrant comment les modulations opérées de la trame d'ingénierie ont produit des *trames projetées* différentes et des organisations différentes pour la situation n°2, visant la création d'algorithmes de résolution des équations de degré 1. Je n'aborderai pas dans cette synthèse la situation n°3, devant faire un choix, consécutif au volume autorisé de ces actes.

Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 de d'Annabelle	**Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 d'Alex**
1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.* 2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.* 3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.* *Équation 1 : $x + 3 = 0$ *Équation 2 : $2x – 3 = 4$ *Équation 3 : $3 – 2x = -2$ Équation 4 : $2 + x = 5x$ Équation 5 : $2x + 3 = 3x + 1$ Équation 6 : $8 – x = \sqrt{2}$ Équation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$ Équation 8 : $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$ Équation 9 : $3 = 2x + 1$ Équation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$ Équation 11 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	*Réaliser sur Algobox un (ou des) algorithme(s) permettant de résoudre les équations ci-dessous.* *Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme. Indiquer à côté de chaque équation, sa ou ses solutions, si elles existent.* Équation 1 : $x + 3 = 0$ Équation 2 : $-1000x = 0$ Équation 3 : $-1000 + x = 0$ Équation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$ Équation 5 : $\frac{10x}{0{,}001} = 4$ Équation 6 : $\pi x + 3 = 4$ Équation 7 : $3x - 5 = 3 - 10x$ Équation 8 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ Équation 9 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ Équation 10 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$

Figure 6 *– Comparaison des organisations de la situation n°2*

L'énoncé d'Alex apparaît plus ouvert que celui d'Annabelle : la possibilité est laissée aux élèves de ne réaliser qu'un seul algorithme qui permette la résolution de toutes les équations proposées, moyennant quelques transformations de base de celles-ci. L'énoncé plus fermé d'Annabelle présente d'autres avantages :
- l'écriture du premier algorithme de résolution de l'équation $ax + b = c$ ne nécessite pas de réaliser de test sur la nullité de a. Ainsi, la tâche des élèves reste-t-elle concentrée sur la constitution principale de la structure de l'algorithme, en en dégageant les éléments à partir de la résolution littérale de l'équation ;
- la constitution du second algorithme apparaît comme un prolongement, une complexification du premier et la *reprise* faite ici directement après le premier algorithme peut permettre d'asseoir les concepts algorithmiques mis en œuvre précédemment ;
- ce second algorithme peut être réalisé en deux temps. L'algorithme peut d'abord être conçu pour résoudre des équations du type $ax + b = cx + d$ avec $a \neq c$. La présence de l'équation 10 ($3x + 2 = 5 + 3x$) permet de montrer l'incomplétude de cet algorithme qui pourra ensuite être parachevé en ajoutant un test sur l'égalité des paramètres a et c et en adaptant les solutions en sortie de l'algorithme.

Ainsi, si l'énoncé d'Alex présente les avantages d'un problème ouvert, celui d'Annabelle montre une progressivité dans l'apprentissage de la constitution d'un algorithme que l'on améliore pas à pas.

QUELQUES RESULTATS DE LA RECHERCHE

Dans cette dernière section, je présente quelques résultats de mes travaux, relatifs aux situations n°1 et n°2 expérimentées, et en particulier au pôle élève, sur les résultats de la catégorisation des équations et sur la constitution des algorithmes de résolution des équations du 1^er^ degré. Je dégage également de mes recherches une schématisation de la *transposition* qui s'opère lors de la recherche d'algorithmes pour résoudre un type de problème mathématique.

La catégorisation des équations

Sur la centaine d'élèves ayant participé à l'expérimentation, soit sur 21 affiches, j'ai recensé les techniques utilisées pour réaliser la classification d'équations de la situation n°1. Le total dépasse 100% car, dans la plupart des affiches, au moins deux types de classement cohabitent. Par exemple, il existe des classements d'élèves où les équations du 2nd degré se trouvent réparties dans plusieurs catégories, certaines dans la catégorie « degré », d'autres dans la catégorie dite « des identités remarquables » (notées équations-identités en figure 7), ou encore dans celle « où le second membre est nul »[6].

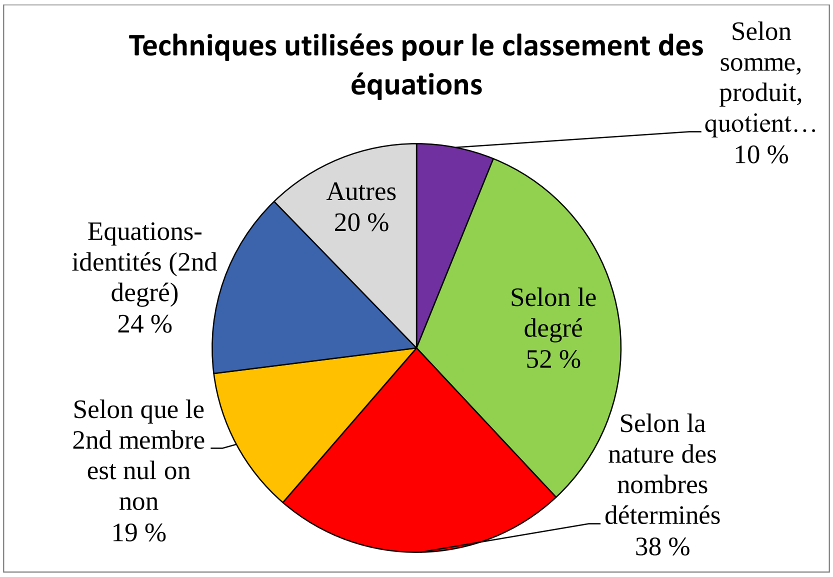


***Figure 7** – Répartition des techniques utilisées pour le classement des équations*

Les analyses ont révélé les points suivants sur les connaissances des élèves au sujet des équations :
- il existe des connaissances juxtaposées qui ne s'imbriquent pas les unes dans les autres. Les savoirs *anciens* (Douady, 1986) comme la notion d'identité remarquable, la règle du produit nul ne viennent pas se fondre dans les savoirs nouveaux de la classe de seconde ;
- il subsiste des difficultés à intégrer les nombres en écriture fractionnaire et les racines carrées dans l'ensemble des nombres réels, et même, pour certains élèves à leur accorder le statut de nombre. Ces difficultés viennent interférer avec la compréhension de l'objet équation et de sa résolution.

Pour montrer le contraste de conception sur les équations entre des élèves d'une même classe, et le type de catégories que les élèves créent, je présente les productions de deux groupes d'élèves.

[6] Ces dénominations sont celles données par les élèves de seconde comme titre de leurs catégories.

Classe 1	$-1000+x=0$ $-1000x=0$ $1000x=0$	Classe 4	$3x(x+\sqrt{5})=0$ $7(x+2)+4(x-3)=0$	Classe 7	$9x^2-16=0$ $x^2-8x+15=0$ $x^2=7$ $x^2+3x=\frac{7}{2}$
Classe 2	$\frac{x^2}{27}=0{,}01$ $-\frac{x}{5}=1$ $\frac{-5}{x}=1$	Classe 5	$3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$ $1{,}8x-3=2{,}5x+7{,}4$		
Classe 3	$\sqrt{2}+x=3$ $\pi x+3=4$ $\sqrt{x}+2=3$	Classe 6	$(3-4x)-(2x-1)=0$ $(3-4x)(2x-1)=0$		

***Figure 8** – Les catégories déterminées par un groupe d'élèves dit « faible »*

Cette première classification, proposée par un groupe dont le niveau en mathématiques est qualifié de « faible »[7] par leur enseignant, est composée de sept classes, pour un total de 19 équations. Ce type de classement, où plus de cinq catégories sont répertoriées, se retrouve pour un élève sur deux sur la centaine d'élèves testés (11 affiches sur 21). Les élèves s'attachent uniquement aux *ostensifs* (Bosch & Chevallard, 1999) présents dans les équations : la valeur des coefficients (cf. classes 1et 6, figure 8), la nature des coefficients selon leur ensemble d'appartenance (cf. classes 2 et 3), les parenthèses (cf. classe 4), la présence d'un x^2 visible (cf. classe 7), … Ces ostensifs sont prégnants et occultent d'autres éléments de ces équations qui seraient plus pertinents dans l'objectif de les résoudre.
À l'autre extrême, des élèves produisent le type de catégorisation de la figure 9, avec un seul critère de classement, le nombre de solutions des équations. Ce type de classement se rencontre pour un quart des élèves sur une centaine d'élèves testés (5 affiches sur 21).

Classe 1 : « *Plusieurs solutions de x* »		Classe 2 : « *Une seule solution de x* »		
$x^2-8x+15=0$	$3x(x+\sqrt{5})=0$	$-1000+x=0$	$-1000x=0$	$3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$
$9x^2-16=0$	$\frac{x^2}{27}=0{,}01$	$\sqrt{2}+x=3$	$\pi x+3=4$	$\sqrt{x}+2=3$
$(3-4x)(2x-1)=0$	$9x^2-16=0$	$7(x+2)+4(x-3)=0$		$1000x=0$
$x^2=7$	$x^2+3x=\frac{7}{2}$	$(3-4x)-(2x-1)=0$		$-\frac{x}{5}=1$
		$1{,}8x-3=2{,}5x+7{,}4$		$\frac{-5}{x}=1$

***Figure 9** – Les catégories déterminées par un groupe d'élèves dit « fort »*

Notons que pour ce groupe d'élèves, la notion de degré n'apparaît pas dans l'appellation des intitulés des classes, même si elle est sous-jacente. Les deux titres choisis par les élèves de ce groupe, « *Plusieurs solutions de x* » et « *Une seule solution de x* » pour désigner leurs catégories, évoquent clairement qu'ils ont considéré la résolution de ces équations, puisque le vocable « *solution* » est usité. De prime abord, cette dénomination peut sembler plus conforme à celle d'équations du premier ou du second degré, puisque les équations ne sont pas toutes polynomiales (cf. $\frac{-5}{x}=1$ et $\sqrt{x}+2=3$). En revanche, les élèves admettent, sans vérification, que toutes ces équations possèdent des solutions réelles (cf. $x^2-8x+15=0$ et $x^2+3x=\frac{7}{2}$).
Côté enseignants, bien que les trois professeurs expérimentateurs soient des enseignants chevronnés ayant plus de 15 ans d'enseignement en lycée, ils ont admis que cette situation leur a permis de réajuster leurs représentations sur les conceptions d'équation des élèves, à l'instar du témoignage du professeur Alex :

> La classification des équations, c'est un truc sur lequel je n'avais jamais réfléchi parce que ça me paraissait évident. Ça me paraissait évident qu'un élève de seconde soit capable de voir une équation du premier degré, du deuxième, de pas mélanger les deux, de savoir la direction à prendre pour les utiliser ou les simplifier, mais en fait …non, je me suis aperçu que c'était pas du tout clair dans leur tête, mais peut-être que ce n'était pas clair dans leur tête non plus parce que je ne m'étais pas penché dessus. Ça m'a vraiment

[7] Notons que les qualificatifs « faible » et « fort » sont attribués par les enseignants, qui se basent sur les résultats de ces élèves aux différentes évaluations réalisées en classe.

questionné sur mon enseignement et sur la façon de recevoir ce qu'on fait.

La situation n°1 a en effet proposé une *tâche non routinière* qui apporte à l'enseignant une meilleure connaissance des obstacles rencontrés par les élèves sur les équations.

L'algorithmique et la programmation pour la résolution d'équations

Pour les situations suivantes, la finalité étant de concevoir des programmes informatiques qui résolvent une certaine catégorie d'équations – du 1er degré pour la situation n°2 et du 2nd degré pour la situation n°3 –, le type de tâches est ici *local* (Chevallard, 2002), non routinier pour les élèves, et les techniques nécessitent un découpage en sous-tâches, elles-mêmes non routinières. Ces types de sous-tâches, non nécessairement séquentiels, peuvent s'énoncer de la façon suivante (cf. figure 6 pour la situation n°2) : reconnaissance d'une forme générique paramétrée pour la série d'équations donnée (type T_1), résolution sous forme littérale de l'équation paramétrée précédente (type T_2), conception d'un algorithme permettant d'automatiser la résolution des équations ayant la forme générique reconnue (type T_3), écriture, sous un logiciel de programmation donné, d'un programme traduisant l'algorithme précédent (type T_4), puis utilisation du programme réalisé pour résoudre les équations données (type T_5).

Avant de revenir sur la façon dont ces types de tâches ont permis de travailler sur les objets de l'algèbre, précisons les types de tâches T_2 à T_4 et les liens qu'elles entretiennent entre elles.

Pour cela, j'évoquerai la *double transposition* de la résolution de ce problème mathématique en vue de sa programmation. Je schématise en figure 10 cette double transposition, en contextualisant les trois étapes à la situation n°2, c'est-à-dire pour l'obtention d'un programme de résolution de l'équation du premier degré $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d réels donnés).

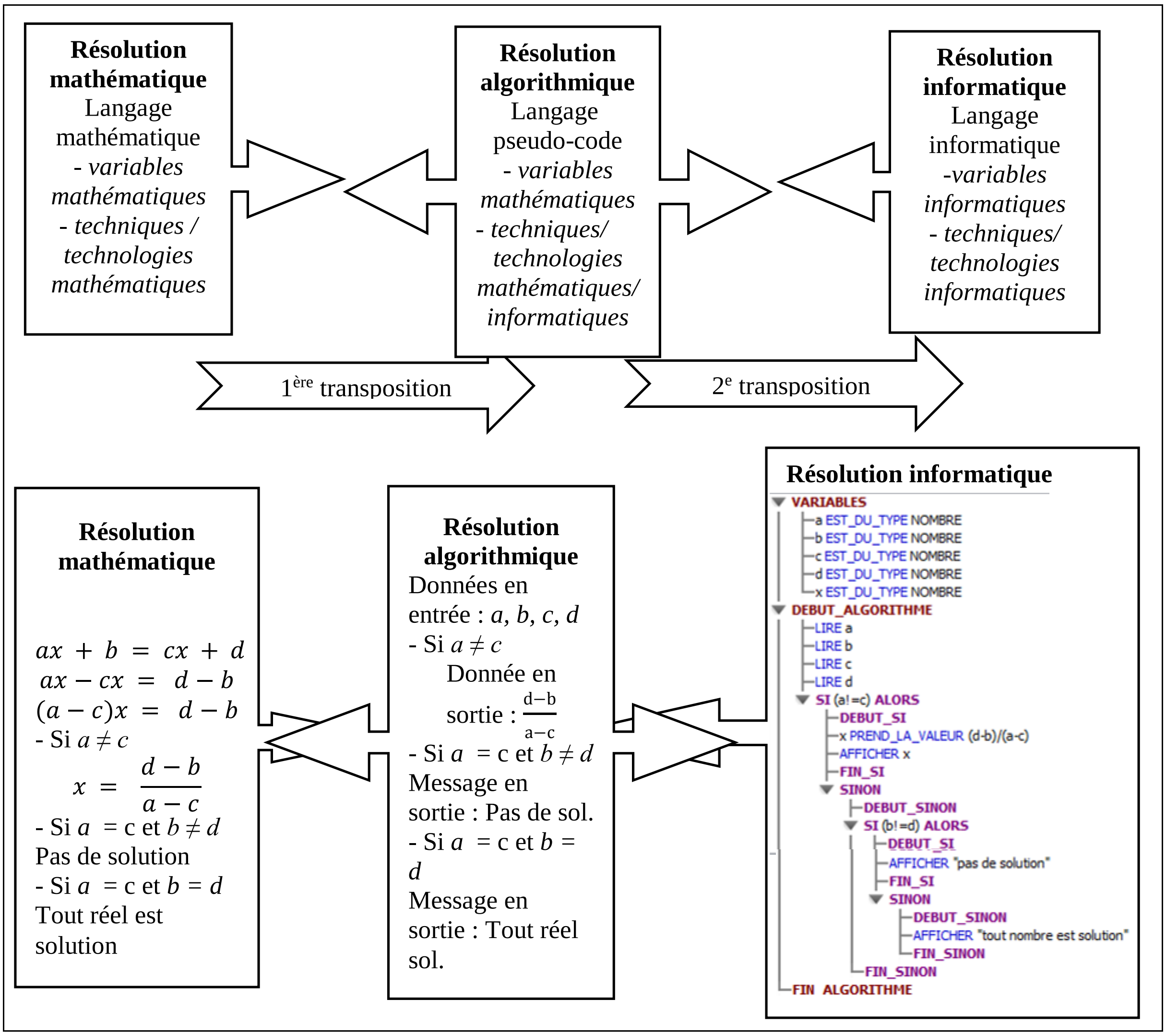


Figure 10 - *Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation*

Cette double transposition a les caractéristiques suivantes :

- la *première transposition* nécessaire à la conception d'un algorithme à partir de la résolution « mathématique » de l'équation du premier degré implique la disparition d'étapes intermédiaires de la résolution en environnement papier-crayon (indiquées en pointillés sur la figure 10). Il existe ici une *pseudo-transparence* (Artigue, 1997) des environnements papier-crayon et algorithmique et une *non-congruence* de ces deux environnements, au sens de Duval (1995). Il y a un réel travail de transposition à effectuer pour passer du résultat mathématique suivant : « L'équation $ax + b = cx + d$ admet pour solution $\frac{d-b}{a-c}$, si $a \neq c$ » à la formulation algorithmique associée. D'autre part, la condition « si $a \neq c$ » arrive en fin de la résolution « à la main », sous forme d'une discussion selon la nullité ou non de $a - c$, alors qu'elle est nécessaire tout au début de l'algorithme. Il y a toute une *reconstruction* nécessaire à envisager pour concevoir l'algorithme à partir de la résolution de l'équation, une pensée *algorithmique* dans laquelle il faut entrer ;
- la *seconde transposition* pour la conception du programme informatique à partir d'un algorithme nécessite non seulement la compréhension d'un nouveau langage, mais également une adaptation de l'algorithme aux contraintes du logiciel utilisé. Par exemple, le logiciel

Algobox[8] ne permet pas l'affichage direct d'une expression à calculer. Le logiciel n'accepte pas l'instruction « *afficher (d – b)/(a – c)* », ce qui oblige à passer par une variable intermédiaire. Ceci induit ici encore une non-congruence entre l'algorithme conçu et le programme informatique.

Pour illustrer cette double transposition, voici une analyse comparée des productions de deux élèves de seconde, Thomas et Alliaume, en environnements papier-crayon et informatisé. Les programmes sont conçus ici pour résoudre les équations du type $ax + b = c$ (a, b, c réels donnés et a non nul). Ils sont différents mais tous deux corrects. Nous schématisons en figure 11 la rencontre de ces environnements.

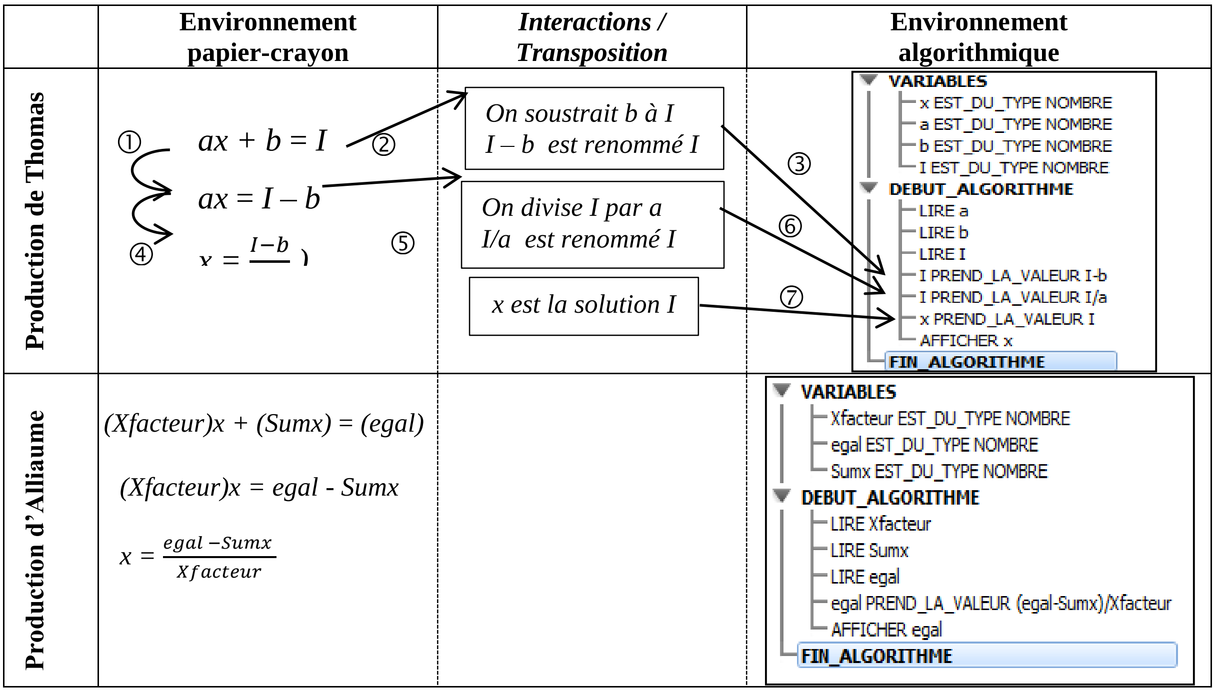


Figure 11- *Exemples de rencontre des environnements papier-crayon et algorithmique*

Pour la production de Thomas, les étapes successives de résolution de l'équation et de *transposition* qui s'opèrent au fur et à mesure pour passer d'un environnement à l'autre ont été fléchées. L'élève réduit l'équation pour la ramener au type $ax = I$: tout se passe comme s'il calculait au fur et à mesure le résultat obtenu pour le membre de droite pour ne l'exprimer que sous un seul nombre, qui se nomme de nouveau I après chaque étape. Ce cheminement lui permet d'accéder à *l'aspect structural* (Sfard, 1991) d'une expression algébrique : par exemple, en écrivant $I – b$ sous la forme I, l'élève visualise que l'ordinateur calcule l'expression $I – b$ et lui retourne un nombre calculé, « unique » qu'il nomme I. L'expression $I – b$ est alors « visualisée » comme le résultat de la soustraction et non plus seulement comme une opération inachevée. D'autre part, Thomas utilise une technique de programmation, qui consiste à réutiliser une variable informatique (I) pour lui attribuer des valeurs successives, dépendant de la valeur précédente de la variable informatique. Thomas essaie d'être en adéquation dans son programme avec son raisonnement. Bien qu'il n'y ait pas *congruence* (Duval, 1995) entre les deux registres, l'élève tente ici de minimiser la distance entre les deux environnements. Cette

[8] Algobox est un logiciel de programmation, libre et gratuit, développé en 2009 par Pascal Brachet, professeur de mathématiques au lycée Bernard Palissy à Agen. L'auteur le définit lui-même comme un *logiciel pédagogique d'aide à la création et à l'exécution d'algorithmes*. C'est le logiciel qu'utilisent les trois professeurs expérimentateurs dans leurs classes.

méthode qui fonctionne ici, se révèlerait plus périlleuse pour un autre type d'équation.
En revanche la production d'Aliaume montre un élève détaché de sa résolution en environnement papier-crayon et qui produit un programme optimisé en nombre de variables et d'instructions. Pour désigner la forme générique des équations du type $ax + b = c$, l'élève Aliaume utilise des noms pour les paramètres, évocateurs de leur statut. Il nomme cette équation *(Xfacteur)x + (Sumx) = (egal)*. Le coefficient de l'inconnue, notée *x* dans sa production parpier-crayon, est nommé « *Xfacteur* », pour rappeler le rôle que joue ce paramètre que l'on multiplie par *x*. Le second terme du membre de gauche s'appelle « *Sumx* », ce qui lui confère le statut d'un nombre que l'on ajoute au terme en *x*. Enfin le paramètre de droite est dénommé « *egal* », évoquant l'annonce du résultat d'une opération, conférant un sens orienté au signe d'égalité. Ces notations sont plus qu'un simple choix de vocabulaire et dénotent bien le sens attribué à ces objets. Elles permettent à l'élève de retrouver facilement de quel paramètre il s'agit, lorsqu'il manipule une équation avec des coefficients déterminés. C'est ici le détour par une *pensée algorithmique* qui favorise cette démarche.

CONCLUSION

Pour conclure, je commencerai par les apports, les limites et les perspectives de cette recherche pour présenter ensuite les principales conclusions relatives à ma problématique.

Apports, limites et perspectives

Ce travail m'a permis de mettre au point une méthodologie de recherche collaborative, avec une coopération entre chercheur et enseignants, méthodologie que j'ai développée et expérimentée de façon empirique. Pour poursuivre ce travail, il serait possible de faire de ce dispositif de collaboration un objet d'étude et d'en déterminer les conditions et les contraintes. Par exemple, que doit « apporter » le chercheur pour être accepté par les enseignants, que peut-il imposer ? Et au contraire, quels types d'éléments modulables peut-il et doit-il laisser aux enseignants pour que la collaboration soit efficiente ?
Un second apport est une étude transpositive, en vue de l'intégration de l'algorithmique/programmation dans l'enseignement des mathématiques, ce qui n'avait pas encore vraiment fait l'objet d'une recherche spécifique, vue la récente introduction de ces domaines dans les programmes du lycée. Cette étude, même si l'expérimentation proposée a été réduite à trois enseignants, a été assujettie aux contraintes et conditions institutionnelles. Les acteurs se sont heurtés aux problèmes de congruence avec l'enseignement usuel et les problèmes soulevés semblent aller au-delà de ces études singulières pour penser des utilisations de l'algorithmique et aussi pour penser la formation nécessaire, initiale et continue, des enseignants.
À propos du choix des enseignants, tous sont expérimentés ici, et une étude plus étendue pourrait être envisagée avec des enseignants débutants. Mais le fait que ces enseignants ne soient pas des experts en algorithmique a été intéressant ce point de vue, puisque les résultats obtenus peuvent être transposables plus facilement.
Pour les perspectives envisagées à la suite de ce travail, une reprise des situations proposées avec des modifications, des améliorations, en tenant compte des résultats obtenus et en intégrant le tout dans une séquence complète, pourrait être expérimentée en classe de seconde. Cette reprise est d'ailleurs succinctement proposée en fin de l'écrit de la thèse (Briant, 2013). Celle-ci pourrait conjuguer la prise en compte d'autres environnements ou avec des professeurs débutants pour étudier la robustesse de l'expérimentation. D'autres logiciels de programmation pourraient également être testés. Dans mon travail, une étude comparative des possibilités des

logiciels de programmation aurait d'ailleurs pu être menée, mais le choix des professeurs expérimentateurs s'étant fixé sur Algobox et la *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) ayant débuté dans les classes sur ce logiciel, j'ai considéré cet élément comme un élément imposé par les enseignants.

Quelques éléments de réponse à la problématique

Donnons maintenant quelques éléments de réponse à la problématique, par un retour sur les hypothèses de recherche.
J'ai émis l'hypothèse (H1) de la non-conformité des enseignants au programme institutionnel de seconde et celle-ci est en grande partie confirmée : les enseignants expérimentateurs évoquent la dénaturation de l'algèbre, et pas seulement en classe de seconde ; ils la signalent également dans le cycle terminal du lycée. Des chercheurs comme Chevallard et Bosch (2012) ou encore Assude et al. (2012) évoquent ce même problème dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre au collège. L'absence d'un domaine algébrique sérié donne l'impression aux enseignants de pratiquer un *saupoudrage* de quelques techniques algébriques, et de ne pas présenter de praxéologies algébriques *complètes*. Néanmoins ces enseignants se conforment aux programmes : ils acceptent de plonger l'algèbre dans des cadres divers, fonctionnel et géométrique en particulier, mais ils effectuent en parallèle des reprises décontextualisées de l'algèbre. Par exemple, les trois enseignants incluent dans leur progression annuelle des séquences nommées « équations, inéquations », ou encore « factorisation, développement » où ils traitent l'algèbre comme objet, sans la plonger dans un cadre fonctionnel ou géométrique.
J'ai fait également fait l'hypothèse (H2) d'une capacité très variable des élèves à décontextualiser les concepts algébriques. Ici encore cette hypothèse est confortée. Non seulement l'analyse de l'étude diagnostique des connaissances des élèves en fin de seconde a corroboré des résultats de recherches antérieures sur les difficultés des élèves à transposer des connaissances algébriques contextualisées, mais l'étude des manuels de 3^e^ et de 2^nde^ a montré que cette difficulté à décontextualiser l'algèbre peut également venir des praxéologies algébriques proposées, incomplètes ou ponctuelles. L'incomplétude des praxéologies porte soit sur le type de tâches (par exemple les équations répertoriées dans les manuels sont très souvent proposées avec des coefficients entiers, occultant ainsi les nombres décimaux, rationnels ou irrationnels), soit sur les techniques exposées. Ces dernières sont souvent ponctuelles, ce sont des microtechniques montrant comment, par exemple, on résout une équation du type $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$, mais on ne trouve généralement pas de praxéologies locales qui permettraient d'unifier ces savoirs, sous une technologie commune.
J'ai aussi émis l'hypothèse (H3) que l'algorithmique serait une aide à l'enseignement et à l'apprentissage de concepts algébriques. Suit le témoignage d'un des professeurs expérimentateurs, lors de l'entretien post-expérimentation :

> Professeur Éric : J'ai trouvé ça vraiment porteur, parce qu'ils ont réussi, à la fin des séances, à repérer de suite quel type d'équations c'était, qui est *a*, qui est *b*, etc. Alors que souvent, quand je fais cours avec les seconde, on fait ça petit à petit, et je sais que ce n'est pas ancré, ça a toujours été un problème. Par rapport à ce que je fais d'habitude, ça c'est largement ancré.
> Chercheur : Tu dirais que ce qu'on a gagné ici dans l'apprentissage de l'algèbre, c'est la compréhension des paramètres ?
> Professeur Éric : Exactement, oui. Et par rapport aux équations, ils se posent la question de quel type d'équations c'est, et une fois qu'on a relevé le type d'équations, ils savent à peu près faire la démarche, je dis à peu près parce que ce n'est pas complètement ancré. Mais ceci dit, avant il y avait vraiment un gros problème, quand il y avait des nombres à virgule ou des racines carrées. Alors que maintenant, grâce aux paramètres justement, et avec l'algorithmique, ça a permis de cataloguer et de se dire par exemple « ça, c'est pareil *que ax + b* » et ils y arrivent. D'ailleurs j'ai remarqué que certains élèves passent par *ax + b*, quand le *a* et le *b* sont compliqués, finalement ils cherchent la formule [*pour déterminer la solution de*

l'équation] …

Chercheur : Tu veux dire qu'ils remplacent les valeurs numériques par *a* et *b* ?

Professeur Éric : Oui, quand *a* et *b* sont des racines carrées… Pour quelques élèves, pas tous, j'ai remarqué qu'ils faisaient ça. Ils cherchent la formule générale et ensuite ils remplacent par les valeurs numériques.

L'enseignant évoque ici comment le détour par l'algorithmique a permis la clarification du concept de paramètre, alors que celui-ci reste une notion *paramathématique* (Chevallard & Joshua, 1982). Le témoignage de l'enseignant montre également le fort lien qu'entretiennent l'algèbre et le numérique et comment des élèves, de retour en environnement papier-crayon, sont capables de réinvestir le concept de paramètre en situation. La structure de l'équation aide à comprendre la structure de l'algorithme, et réciproquement. En effet, ce témoignage indique que certains élèves sont maintenant capables de considérer tour à tour l'aspect *structural* et l'aspect *procédural* d'une équation (Sfard, 1991) en remplaçant les valeurs numériques par des lettres, pour en considérer sa structure, puis en résolvant l'équation en utilisant une technique appropriée.

De plus, le fait de programmer les algorithmes et de ne pas en rester au stade de l'algorithme « papier-crayon » ajoute encore à cette différentiation essentielle du rôle des lettres : les paramètres sont des données d'entrée à faire lire à l'ordinateur, alors que l'inconnue est une donnée de sortie du programme à faire afficher à l'écran. La programmation permet l'exploration des objets de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets *matériels*. Les coefficients des équations sont considérés un à un, nommés, *manipulés,* entrés au clavier pour être lus par le logiciel. Ils prennent une dimension presque « palpable ». Un nouveau *registre* (Duval, 1995), offrant une nouvelle représentation des objets de l'algèbre, est ainsi créé.

Néanmoins, l'accession à ce registre nécessite une instrumentation relativement poussée. Beaucoup d'élèves ont été arrêtés, au départ, par leur méconnaissance de la structure de base d'un algorithme et d'un programme, ainsi que celle du langage de programmation du logiciel Algobox. On ne peut pas faire l'économie de la nécessaire *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) pour obtenir des résultats probants dans le domaine de l'algèbre. Mais ceci aurait été vrai pour tout autre domaine mathématique que l'on aurait associé à l'algorithmique.

Pour l'hypothèse H4, j'ai pu déterminer quelques invariants et différences dans les praxéologies algébriques des trois enseignants expérimentateurs. En particulier, leurs organisations mathématique et didactique pour les secteurs algébriques du programme institutionnel de seconde sont assez similaires, et comme déjà évoqués pour l'hypothèse H1, ces professeurs chevronnés choisissent d'institutionnaliser ou de réinstitutionnaliser des praxéologies algébriques qui étaient au programme des classes antérieures du collège. De façon quasi-systématique, les enseignants ne se contentent pas de rappeler les techniques de résolution des équations, celles-ci sont la plupart du temps accompagnées d'éléments technologiques les justifiant. Les principales différences observées sont dues à deux points.

Le premier point concerne l'interprétation différente qu'ont les enseignants du programme institutionnel relativement à la place des équations de degré 2 : pour deux enseignants sur les trois ayant participé à l'expérimentation, la résolution des équations de degré 2 étant étudiée de façon exhaustive dans les programmes de première générale (MEN, 2010a-b), elle doit avoir une place minimale en seconde ; ces professeurs ont d'ailleurs refusé d'expérimenter la situation n°3. En revanche, le troisième enseignant lui octroie une place importante. La lecture du programme institutionnel de seconde (MEN, 2009a) est différente selon les enseignants. Le secteur *Équations* du domaine *Fonctions* indique que les élèves doivent être capables de *résoudre une équation se ramenant au premier degré* et d'autre part, dans ce même domaine, il est attendu que soient étudiées *les fonctions polynômes de degré 2.* Ainsi, pour certains professeurs, l'accent doit être mis sur ces équations, alors que d'autres tiennent davantage compte des commentaires qui précisent *qu'il n'est pas attendu de savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2.* Ces ambiguïtés induisent des compréhensions différentes

des types de tâches à effectuer et une difficulté pour les enseignants à sérier la place de ces équations.
Le second point de divergence tient à l'expérimentation, lorsque l'algèbre et l'algorithmique apparaissent de façon conjointe, pour la situation n°2 en particulier. J'ai montré précédemment (cf. figure 6) un exemple de différences d'organisations mathématique et didactique des professeurs Alex et Annabelle, et c'est l'organisation d'Annabelle, plus progressive, qui a donné une plus grande réussite dans la recherche des algorithmes. Ces divergences peuvent s'expliquer par la jeunesse de l'introduction de l'algorithmique et de la programmation et d'un manque de repères didactiques des enseignants, qui testent des organisations nouvelles pour eux.

L'algorithmique, un détour en vue d'une reprise nécessaire des concepts d'algèbre élémentaire

Alors que la problématique posait la question des conditions et des contraintes pour une *reprise* de l'algèbre en seconde, l'expérimentation menée a montré que l'introduction de l'algorithmique favorise cette *reprise* (Larguier, 2009) pour le secteur des équations. Cette reprise ne se fait pas à l'identique, ce n'est pas qu'un simple redoublement du temps didactique : elle permet d'aller plus loin dans la considération des objets qui gravitent autour du concept d'équation. Citons en particulier la prise en compte du concept de *paramètre,* dont Chevallard précisait, déjà en 1989, l'importance :

> Ce qui fait la force de l'algèbre, c'est ce que nous nommerions aujourd'hui l'emploi de **paramètres**, soit les variables du système dont les valeurs sont supposées connues. En termes de modélisation, l'introduction des paramètres fait passer d'une modélisation « arithmétique » […] à une modélisation (algébrique) où les énoncés en vernaculaire cèdent la place à des expressions littérales (ou numéro-littérales), sur lesquelles opère le calcul algébrique […]. (p.65)

Pour Chevallard, s'interroger sur les paramètres est une entrée dans la modélisation algébrique, et mes travaux montrent que le détour par l'algorithmique permet d'y accéder, en réalisant une certaine *matérialisation* des objets de l'algèbre, en les « visualisant » et en « les faisant vivre » au sein d'un programme informatique.
Parmi les *contraintes,* nous pouvons citer les difficultés rencontrées par les enseignants expérimentateurs pour intégrer l'algorithmique et la programmation dans leur enseignement. Ces professeurs sont autodidactes, ils n'ont reçu aucune formation dans ces domaines. Si l'institution Éducation Nationale souhaite que l'intégration de l'algorithmique et de la programmation soient viables au sein de la discipline des mathématiques, un *équipement praxéologique* de la profession (Chevallard & Cirade, 2010) serait nécessaire, équipement comportant à la fois des savoirs de référence sur l'algorithmique, la programmation et la logique mais aussi des savoirs pour enseigner ces nouveaux domaines.
Pour conclure, mettant en avant *la diminution de l'offre scolaire d'algèbre* (Bosch & Chevallard, 2012), je voulais finir par un plaidoyer en faveur d'une reprise des curricula algébriques du collège et du lycée, pour qu'un domaine algébrique soit de nouveau mis en place, ou du moins un domaine numérico-algébrique, en considérant le lien fort qu'entretiennent ces deux domaines. Les contenus de ce domaine pourraient prendre en compte de façon plus marquée qu'aujourd'hui les dimensions *objet* et *outil* de l'algèbre, avec une étude spécifique de certains objets considérés aujourd'hui comme *para ou proto-mathématiques* (Chevallard & Joshua, 1982).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281-308.

ARTIGUE M. (1997) Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33(2),* 133-169

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 41-62.

BALACHEFF N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14(1),* 9-42.

BEDNARZ N., DESGAGNE S. (2005) Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche "avec" plutôt que "sur" les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*. *31*(2), 245-258.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques. 19(1),* 77-123.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 9-40.

BRIANT N. (2013) *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00920506v1

BRONNER A. (1997) *Étude didactique des nombres réels, indécimalité et racine carrée*. (Thèse de doctorat non publiée, Université J. Fourier, Grenoble).

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y., CIRADE G. (2010) Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dirs.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR et Paris : INRP.

CHEVALLARD Y., JOSHUA MA. (1982) Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*.2, p. 157-239.

DESGAGNE S. (1997) Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*. *23*(2), 371-393.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

DUVAL R. (1995) Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : Peter Lang.

GRUGEON B. (1995) *Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G*. (Thèse de doctorat, université Paris 7).

LARGUIER M. (2005) *Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde.* Mémoire de Master de recherche 2. Montpellier : Université Montpellier 2.

LARGUIER M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2).

MEN (2008a) Ministère de l'Éducation nationale. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. BO spécial n° 6 du 28 août 2008. Paris.

MEN (2009a) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.

MEN (2009b) Ministère de l'Éducation nationale. Ressources pour la classe de seconde, *Fonctions ;* Eduscol, DGESCO.

MEN (2010a) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de première de la série scientifique ; Bulletin officiel n° 9 du 30 septembre 2010.

MEN (2010b) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de première de la classe de première des séries ES et L ; Bulletin officiel n° 9 du 30 septembre 2010.

MODESTE S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble).

NGUYEN C-T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice.* (Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble).

RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as dìfferent sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

SFARD A., LINCHEVSKI L. (1994) Between arithmetic and algebra: in the search of a missing link. The case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico Universia Torino*. *52*/3, 279-307.

VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

L'ACTIVITE MATHEMATIQUE DES ELEVES : NOUVEAU REGARD SUR LES RELATIONS CONTRAT DIDACTIQUE-MILIEU ET PERSPECTIVE COMPARATISTE

Magali **HERSANT**

ESPE de Nantes, Université de Nantes, CREN

magali.hersant@univ-nantes.fr

Résumé

Quelles conditions didactiques permettent une activité des élèves source d'apprentissages mathématiques ? Cette question est au cœur des travaux didactiques. Dans mon intervention, je travaille cette question d'abord à l'aide des concepts de contrat didactique et de milieu (Brousseau, 1998). En distinguant, facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique (Hersant, 2014), j'étudie les relations entre contrat et milieu dans le jeu de l'enseignant à partir de trois exemples. Cela permet de montrer que l'appui sur le contrat didactique peut, dans certains cas, constituer une condition pour préserver une activité mathématique chez les élèves. Dans une perspective comparatiste, j'analyse aussi deux de ces exemples avec le point de vue de la théorie des situations et celui de la problématisation (Fabre, Orange, 1997 ; Orange, 2012) pour questionner les relations entre contrat didactique, adidacticité et construction du problème.

Mots clés : activité mathématique de l'élève, contrat didactique, facette du contrat didactique, milieu, problématisation

1. INTRODUCTION

Mes travaux portent sur l'étude des conditions didactiques de la rencontre des élèves avec le savoir ; ils visent à comprendre l'effet de ces conditions sur l'activité mathématique des élèves et leurs apprentissages.

L'activité de l'enseignant détermine une part importante de ces conditions, de par la situation que l'enseignant choisit et ses interventions orales au cours de la séance. Mais elle ne détermine, ni l'ensemble des conditions de la rencontre avec le savoir, ni l'activité réelle de l'élève dans la classe de mathématiques. Ces hypothèses sont partagées par les didacticiens, elles sont mises au travail à partir de différents cadres théoriques. Ainsi, par exemple, le cadre de la double approche (Robert, Rogalski, 2002 ; Vandebrouck 2008) accorde une importance particulière à l'effet des aides et compléments que l'enseignant apporte à la tâche initiale et considère en conséquence l'activité potentielle des élèves. Mais Robert pointe aussi l'effet des habitudes de la classe, au-delà des interventions orales de l'enseignant, sur cette activité (Robert, 2004, p. 69) : « l'importance des habitudes est bien réelle et donc une part des activités des élèves est supposée enclenchée par de tels effets. »

J'ai choisi de modéliser l'activité de l'enseignant et de l'élève, d'abord, avec le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Et, dans l'étude des conditions de la rencontre avec le savoir, j'accorde une importance particulière au contrat didactique. En effet, je considère qu'il affecte la lecture que l'élève peut faire de la situation, au-delà du discours de l'enseignant et des ajouts à l'énoncé qu'il propose, et influence donc son activité. Par ailleurs, je considère aussi que l'activité de l'enseignant ne peut être envisagée uniquement comme un projet d'organiser cognitivement la rencontre des élèves avec le savoir. En effet, l'enseignant a à gérer d'autres contraintes, en particulier des contraintes d'avancée du temps didactique. C'est une façon pour moi de prendre en compte, de façon minimale, l'aspect métier de l'enseignement. Cela me conduit à faire l'hypothèse d'un jeu possible de l'enseignant sur deux leviers pour permettre l'avancée du temps didactique : un jeu sur le milieu et un jeu sur le contrat didactique (Hersant, 2010 ; Hersant, 2012). Ainsi, dans l'étude des conditions didactiques de la rencontre de l'élève avec le savoir, je considère la situation à la fois avec le point de vue de l'enseignant non strictement envisagé comme un organisateur cognitif et avec le point de vue de l'élève envisagé comme un sujet épistémique et culturel. Autrement dit, je considère que les concepts « milieu » et « contrat didactique » sont de bons candidats pour analyser, à la fois, l'activité de l'enseignant en tenant compte de son projet didactique et des régulations qu'il y apporte lorsqu'il est confronté à la contingence et l'activité de l'élève, sans la réduire à sa stricte interaction avec le milieu de la situation dans la mesure où, d'une part, le milieu n'est pas toujours assez consistant et, d'autre part, la rencontre de l'élève avec le savoir se réalise de façon différentielle en fonction de l'intérêt que l'élève porte à la situation (sa volonté de s'y confronter en particulier), de ses connaissances mathématiques et de ses connaissances sur le fonctionnement des situations didactiques. La mobilisation conjointe des concepts de contrat didactique et milieu permet d'envisager leurs interactions et leurs effets sur l'activité des élèves.

Ce choix de modélisation de l'activité conjointe de l'enseignant et de l'élève, au cœur de mon projet de recherche depuis ma thèse, génère quelques problèmes didactiques. Pour y répondre j'ai développé la notion de contrat didactique (structuration en niveau et facettes) afin de la rendre fonctionnelle pour des analyses plus fines. Ces problèmes didactiques m'ont aussi amenée à questionner, dans une perspective de didactique comparée, les relations entre contrat didactique, milieu et problématisation (Fabre, Orange, 1997) dans l'étude de l'activité de l'élève.

Dans ce texte, je commencerais par rappeler les problèmes didactiques que j'ai rencontrés et la modélisation du contrat didactique que je propose pour y répondre. Ensuite, en m'appuyant sur deux exemples, je montrerai ce qu'apportent ces développements du contrat didactique, d'une part, pour l'analyse de l'activité de l'élève et la compréhension des relations entre contrat didactique et milieu et, d'autre part, l'étude des relations entre contrat didactique et problématisation.

2. Quelques problemes didactiques lies a l'usage du milieu et du contrat didactique pour l'analyse conjointe de l'activite de l'enseignant et de l'eleve

Les notions de milieu et de contrat didactique présentes dès le début dans la théorie des situations didactiques ont été aménagées dans les années 90 pour fournir des outils d'analyse des situations ordinaires. Ces aménagements peuvent être résumés de la façon suivante.

Les premières précisions ont concerné la notion de milieu. La structuration du milieu (Brousseau, 1990 ; Margolinas, 1995) a permis d'effectuer des analyses *a posteriori* de situations. Puis le contrat didactique a été envisagé comme les stratégies de l'enseignant (Brousseau, 1996) ; cela a permis de caractériser le partage de responsabilités entre le système enseignant et le système enseigné. A partir de cette caractérisation Comiti et Grenier (1997) ont défini les contrats didactiques locaux comme des moyens de gérer et maintenir la relation didactique dans les classes ordinaires (1997, p. 85)

> Lorsque l'on s'intéresse aux interactions survenant en situation de classe et notamment aux régulations qui s'exercent sur le contenu mathématique en jeu, le modèle global [du contrat didactique] ne suffit pas. Les changements de règle ou de niveaux d'activités que l'on observe relèvent de modèles 'locaux' liés à des évènements contingents et ont pour objet principal de maintenir la relation didactique : l'analyse porte alors sur ces modèles locaux, les moyens de régulation pouvant être la négociation d'un nouveau contrat, que nous caractériserons alors de contrat local.

Ces précisions ont permis de nombreux travaux sur les pratiques ordinaires. Mais, dans mon travail de thèse (Hersant, 2001), confrontée à un corpus où certaines situations avaient très peu de potentialités adidactiques, pour moi, deux questions restaient en suspens :

- *quid* de l'outil milieu quand les potentialités adidactiques de la situation sont nulles et que l'enseignant pilote essentiellement par le contrat ?
- au-delà du local, le contrat didactique participe des conditions de la rencontre de l'élève avec le savoir et a un effet sur son activité (l'effet « âge du capitaine » par exemple) : comment rendre compte à un niveau non local du contrat didactique dans ces cas-là et dans les autres ?

Aussi, pour permettre l'analyse de ces situations à faibles potentialités didactiques j'ai identifié des composantes du contrat didactique (domaine, statut didactique du savoir, caractéristique méso de la situation, partage de responsabilités) et structuré le contrat didactique en trois niveaux (macro, méso, micro). Ces travaux ont permis des premières précisions sur les relations entre contrat didactique et milieu (Hersant, 2001 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2003 ; Hersant et Perrin-Glorian, 2005).

En poursuivant l'analyse de séances ordinaires avec ces outils et en travaillant sur des ingénieries (Hersant, 2010a) j'ai formulé d'autres problèmes relatifs aux effets d'ouverture / fermeture de la situation sur l'activité des élèves. En effet, certaines actions de régulation de l'enseignant qui visent à ouvrir ou fermer la situation ne correspondent pas à un jeu sur la répartition des responsabilités par rapport au savoir mais relèvent tout de même du jeu sur le contrat didactique et influencent l'activité des élèves, dans son rapport éventuel avec le milieu de la situation et dans la nature de cette activité. Comment en rendre compte ? Que ce soit pour les ingénieries didactiques ou pour les classes ordinaires est-ce que toutes ces régulations d'ouverture / fermeture de situation se valent ? Où se jouent les différences ? M.J. Perrin-Glorian m'a demandé à ma soutenance d'HDR « quelle différence, s'il y en a, entre introduire un objet dans le milieu ou introduire une question ? ». Je pense que c'est fondamentalement une question de contrat didactique que l'on peut décliner en sous-questions : à quelles conditions préserve-t-on une activité mathématique chez les élèves lorsqu'on introduit une question dans le milieu ? Comment saisir finement la nature de cette activité ?

Ces questions m'ont conduite à préciser encore la notion de contrat didactique - en distinguant une facette épistémologique et une facette sociale - et les relations contrat didactique - milieu (Hersant, 2010b, 2012, 2014). Elles m'ont aussi incité à effectuer des travaux comparatistes en mobilisant le cadre de la problématisation pour étudier les rapports entre contrat didactique, construction de savoirs et construction de problème, dans les classes ordinaires ou dans les ingénieries didactiques.

3. FACETTES SOCIALE ET EPISTEMOLOGIQUE DU CONTRAT DIDACTIQUE

Cette partie reprend, de façon résumée, l'article paru dans le numéro 34(1) de la revue *Recherche en didactique des mathématiques* en janvier 2014 (Hersant, 2014).

Je considère le contrat didactique comme un *ensemble de clauses relatives au savoir et à sa construction dans le système scolaire*. Ces clauses correspondent à une analyse du chercheur, elles ne sont généralement pas explicites pour l'enseignant, ni pour les élèves, bien qu'elles permettent de régler leurs attentes réciproques à propos du savoir. Du côté de l'enseignant, ces clauses constituent des moyens de permettre la dévolution du problème ou de faire avancer sa résolution. Du côté des élèves ce sont des outils de lecture de la situation didactique, et, en particulier des attentes de l'enseignant.

Certaines clauses correspondent à des connaissances mathématiques ou sur les pratiques des mathématiques, d'autres à des connaissances sur le fonctionnement de la classe de mathématique ou sur le fonctionnement plus général de la classe. C'est à partir de cette différence de nature des clauses que je distingue respectivement la facette épistémologique, et la facette sociale du contrat didactique. Évidemment, il y a du social dans l'épistémologique mais c'est la difficulté de désigner les choses.

Par ailleurs, ces clauses renvoient à des niveaux de granularité différents : en géométrie, le fait qu'on n'ait pas le droit de mesurer pour montrer l'égalité de longueurs est une clause du contrat didactique valable à un niveau macro à partir de la moitié du collège. En CM1, au cours de la séquence sur les fractions - décimaux, mais après que les nombres décimaux ont été introduits, quand le professeur dit « à l'aide de la bande unité, indiquer la longueur de ce segment » il attend une écriture fractionnaire de cette longueur (et non décimale). C'est une convention locale, au niveau du méso-contrat didactique. Enfin, lorsque le professeur donne un exercice il attend que les élèves se mettent travail, c'est une clause au niveau micro, valable au-delà de la classe de maths.

Le croisement des facettes du contrat didactique et de ses niveaux permet de modéliser la structuration du contrat didactique avec le tableau suivant (Hersant, 2014, p. 24) :

Niveau de contrat didactique concerné	Composantes du contrat stables à ce niveau	Facette épistémologique	Facette sociale
		Exemples de clauses (certaines sont des connaissances élèves fausses)	
Macro-contrat didactique	Discipline mathématique / pédagogie	On prouve toujours son résultat. Un contre-exemple invalide une proposition. (discipline)	Ce que le professeur écrit au tableau est utile pour résoudre le problème. Si le professeur écrit quelque chose au tableau c'est qu'il faut l'utiliser. (pédagogie)
	Domaine mathématique	En algèbre on utilise des lettres. Quand il y a des lettres dans un énoncé il faut écrire une équation. En géométrie, pour démontrer on ne mesure pas (valable à partir de la mi-collège)	Dans le chapitre d'algèbre (resp. de proportionnalité), il faut utiliser l'algèbre (resp. la proportionnalité) pour résoudre tous les exercices.
Méso-contrat	Statut didactique du savoir & caractéristiques de la situation	Dans ce chapitre, lorsque l'enseignante indique « avec la calculatrice » cela veut dire qu'elle attend que je calcule le prix final en utilisant le coefficient de proportionnalité entre le prix initial et le prix final.	Quand on fait une activité, c'est pour introduire un nouveau chapitre.
Micro-contrat	Répartition des responsabilités		Quand il pose un exercice, le professeur attend de chacun des élèves qu'il cherche le problème.

Figure 1 : structuration du contrat didactique en facettes et niveaux

Je vais utiliser cette modélisation pour analyser des exemples.

4. JEUX DE COULEUR

Il est commun de dire qu'un changement volontaire de couleur de craie par l'enseignant peut avoir un effet négatif sur l'activité des élèves et d'associer ce jeu de couleurs à des phénomènes de contrat didactique. A partir de deux exemples, je vais d'abord montrer que la modélisation du contrat didactique présentée ci-dessus permet, à partir d'une analyse fine des phénomènes de contrat en jeu et des interactions contrat – milieu, de préciser cela en analysant les effets potentiels d'un tel jeu sur l'activité des élèves.

Les deux exemples sont issus de séances sur le problème « Les trois nombres qui se suivent » (ERMEL 1999) réalisées par deux enseignants différents dans deux classes de cycle 3. J'ai déjà proposé une analyse de ces séances du point de vue des micro-contrats didactiques (Hersant 2013), des jeux respectifs des enseignants sur le contrat didactique et le milieu (Hersant, 2010a).

Il s’agit ici d’effectuer des analyses plus fines des relations contrat – milieu pour envisager les effets des actions de l’enseignant sur l’activité des élèves.

Le problème proposé aux élèves est composé de plusieurs questions identiques : 15 peut-il se décomposer en la somme de trois qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ? Idem pour 36, 96, 46. Je vais m’intéresser à la phase où, ayant montré que 15, 36 et 96 se décomposent, les élèves travaillent sur le cas de 46. L’objectif de cette phase est d’amener les élèves à montrer que 46 ne se décompose pas à partir d’une recherche exhaustive des possibles. Ce problème n’est pas évident au cycle 3 et les deux enseignants observés ont recours à un jeu de couleur pour faire avancer plus vite le temps didactique.

Analyse des interactions contrat didactique - milieu et de l’activité potentielle des élèves

Premier jeu de couleur

Dans la première classe, le professeur écrit d’emblée au tableau la question pour 46 en rouge alors qu’il a écrit les précédentes en blanc.

15 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?
36 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?
96 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?
46 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?

Ce changement volontaire de couleur n’est accompagné d’aucun commentaire de l’enseignant mais il est clairement identifié par les élèves comme une volonté de mettre en évidence une différence avec les cas précédents. Ce qui leur permet d’interpréter ainsi l’action de l’enseignant – de façon plus ou moins consciente – est la clause suivante : « si le prof change de couleur c’est qu’il veut nous indiquer quelque chose ».

J’analyse cette action de l’enseignant comme un jeu sur la facette sociale du contrat didactique à un niveau macro qui ne concerne pas le domaine mathématique. Il s’agit de la facette sociale car la clause en jeu renvoie à une lecture de la situation qui ne concerne pas les savoirs mathématiques. Quelles sont les conséquences de cette action sur l’activité des élèves ? L’enseignant suggère la spécificité de 46 : contrairement à 15, 36 et 96, 46 ne se décompose pas. Il prive ainsi les élèves d'une interaction avec le milieu de la situation qui aurait permis la confrontation empirique à l'impossibilité de décomposer 46, l’émergence d’un doute dont Balacheff souligne qu’il est le moteur de la preuve et la formulation d’une conjecture. Par ce jeu sur le contrat didactique, l’enseignant transforme la question en une devinette et fournit un raccourci vers la solution : 46 ne se décompose pas parce que le professeur l'a dit. Dès lors l’activité des élèves ne peut correspondre à un travail consistant sur l’élaboration de la preuve : il ne s’agit plus de produire une preuve pour lever le doute ou convaincre de l’impossibilité de décomposer 46 mais de produire une preuve formelle. La nature même de l’activité des élèves est modifiée. De plus, à un niveau qui dépasse la résolution de ce problème, dans cette configuration, les élèves, parce que le travail empirique est court-circuité, ne sont pas mis en situation de déconstruire une croyance forte : tous les problèmes de mathématiques sont possibles.

Deuxième jeu de couleurs

Dans la seconde classe, les élèves ont montré qu'on peut décomposer 15, 96 et 36 et l'enseignante a écrit ces résultats au tableau. Elle pose la question pour 46 sans donner d'indice sur la réponse. Les élèves produisent des affiches par groupe. Sur les six affiches, quatre justifient l'impossibilité de décomposer 46 par le fait qu'il est impair. L'argument de parité est très prégnant dans la classe et les élèves n'accordent aucun crédit aux affiches qui font référence à l'argument attendu.

Les échanges entre l'enseignante et les élèves ainsi que les productions des élèves montrent que pour la plupart des élèves de la classe, le milieu comprend les résultats des problèmes précédents (15, 36 et 96 se décomposent), des faits comme « 45 = 14+15+16 » et « 48 = 15+16+17 », le fait que « 46 est impair » et une définition erronée de « nombre impair », sauf pour Manuella qui connaît visiblement la définition. Le milieu apparaît insuffisant pour invalider l'argument de parité dans la mesure où la définition de nombre pair / impair n'est pas une connaissance stabilisée et partagée dans la classe.

L'enseignante le perçoit et, vraisemblablement, ne semble pas vouloir passer en force (elle pourrait s'appuyer sur Manuella). Elle mène alors plusieurs actions que l'on peut résumer ainsi. D'abord, elle procède à un premier aménagement du milieu : elle demande la définition d'un nombre impair, puis interroge les élèves sur la parité de 46, 15, 36 et, pour chacun de ces nombres, elle fait préciser oralement s'il se décompose ou pas. L'enseignante essaie alors d'obtenir une formulation de la preuve mais l'argument de parité revient, sauf pour Siam et Manuella. L'enseignante réactive alors le milieu en obtenant un rappel de la définition d'un nombre pair et d'un nombre impair. Quentin, réagit : « Pourquoi est-ce que ça marche avec 15 alors ? », mais les autres ne mettent toujours pas en relation la définition avec les éléments établis précédemment. La résolution du problème n'avance pas ! L'enseignante prend alors une craie verte (alors qu'elle avait écrit précédemment en blanc) et complète son tableau noir de la façon suivante (figure 2) en interrogeant les élèves :

816. P : 46 ça finit par 6, donc c'est…. pair. 46 il est pair, je vais écrire ça ici.
Les élèves commencent à parler
821. P : 15 on a réussi, il est impair. 46 il est pair. Qu'est-ce qu'on a d'autre ? Impair … Quentin, Quentin ?
822. Quentin : 36 il est pair aussi.
823. P : 36 il est pair.
824. Manuella : et 96 est pair parce que ça se finit par 6.
828. P : donc qu'est-ce qu'on peut dire ? … ouais on a réussi…
830. P : 15 il est impair et on a réussi. 96 il est pair et on a réussi. Alors est-ce que de dire c'est pair ou impair qu'est-ce que ça nous permet ?
831. Naïm : rien, rien parce que …
833. P : chut, chut, chut… Naïm ?
834. Naïm : ça fait rien du tout parce que c'est soit impair ou pair heu…. Tu peux…
835. P : exactement. Naïm, répète bien fort ce que tu viens de me… ce que tu viens de nous dire.
836. Naïm : ben ça change rien si on fait, si c'est impair ou pair ben heu…
837. P : voilà
838. N : on peut … on peut toujours chercher …
840. E : c'est impossible.

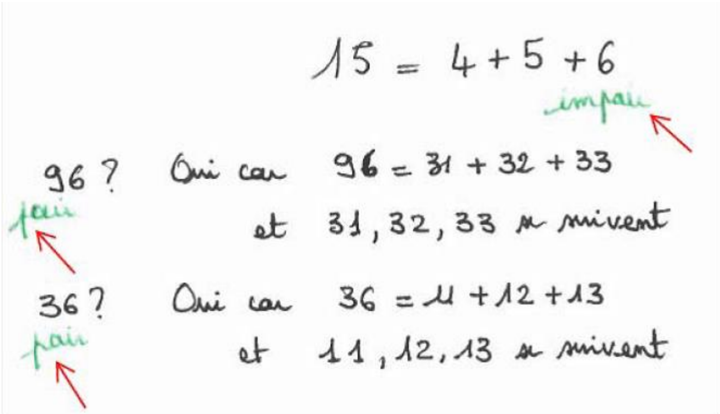


Figure 2 : Les flèches rouges indiquent les ajouts que l'enseignante fait au tableau initial.

Cette dernière action de l'enseignante est aussi un jeu sur la facette sociale du contrat didactique au niveau macro, hors domaine mathématique ; elle s'appuie sur la même clause que dans l'autre classe. Mais, elle est associée à un aménagement du milieu de la situation qui précise les données à mettre en relation pour résoudre le problème et arrive comme un soutien à cet aménagement du milieu. Ainsi, ce jeu de couleurs ménage un part d'adidacticité à la situation dans la mesure où il revient aux élèves de mobiliser la notion de contre-exemple pour invalider la conjecture à partir des éléments fournis. L'activité mathématique des élèves est consistante : ils ont à charge de montrer que l'argument est invalide parce qu'il y a à la fois des nombres pairs et impairs qui se décomposent.

Quelques remarques de synthèse

Dans les deux cas, les enseignants s'appuient sur la clause « « si le prof change de couleur c'est qu'il veut nous indiquer quelque chose » et joue sur la facette sociale du contrat didactique, hors domaine. Mais l'analyse met en évidence que les interactions contrat didactique - milieu sont différentes et que ces deux jeux sur le contrat didactique ont, en conséquence, des effets très différents sur l'activité des élèves.

Ces exemples montrent en particulier qu'un jeu sur la facette sociale du contrat didactique n'implique pas forcément une impossibilité d'adidacticité. Au contraire, cela peut être un moyen pour permettre cette adidacticité. Cette remarque est pour moi très importante car, dans l'analyse des pratiques enseignantes, on peut être tenté d'envisager le contrat didactique uniquement comme un élément qui prive les élèves d'une activité mathématique consistante.

Le second exemple encourage à mener des analyses fines des relations entre contrat et milieu. D'après les « cas » dont je dispose actuellement, je formule l'hypothèse que la préservation du potentiel adidactique d'une situation semble étroitement dépendre des associations « niveau de contrat didactique » – « nature de la facette du contrat didactique ». C'est une hypothèse à consolider.

Quelle(s) problématisation(s) pour les élèves ?

Dans ce paragraphe, j'utilise le cadre de la problématisation (Fabre, Orange, 1997) pour étudier et comparer les actions de ces deux enseignants sur l'activité des élèves. Même si ce cadre est issu de la didactique des Sciences de la Vie et de la Terre et même s'il n'adopte pas les mêmes hypothèses d'apprentissage que la théorie des situations didactiques, il me paraît pertinent pour l'analyse didactique de l'activité mathématique des élèves, en relation avec la notion de milieu (pour des précisions voir Hersant, 2010a).

Dans les termes de la problématisation, le premier jeu de couleur permet la constitution implicite d'une série :

15	oui
36	oui
96	oui
46	?

Cette série (nombre, décomposition possible ou pas) crée deux types de couples : (nombre écrit en blanc, se décompose) et (nombre écrit en rouge, indéterminé). Elle n'est pas problématique et suggère une partition de l'ensemble des entiers en fonction du critère de couleur congruente avec une partition en fonction du critère de possibilité de décomposition. Je pense que cette série crée des associations qui risquent de court-circuiter la construction du problème et qu'alors l'activité des élèves relève d'une problématisation technique mais en aucun cas d'une problématisation théorique, au sens donné par Orange (2005) à ces deux types d'activité :

> [dans la problématisation technique] les nécessités et les possibilités repérées le sont comme moyen d'arriver à une solution concernant ce cas. Ce sont des problématisations orientées vers les solutions.
> "Cette problématisation [la problématisation théorique] est généralisante et abstractive, et non pas contextualisée. […] Cette problématisation est orientée vers les conditions et non vers la solution comme dans les problématisations techniques (Orange, 2005) : alors que dans une problématisation technique, la problématisation et la détermination des conditions (contraintes) est un moyen d'accéder à une solution, dans une problématisation théorique ce sont les nécessités […] qui sont le véritable résultat du travail du problème : elles établissent un savoir, théorique et critique parce qu'apodictique. Les solutions trouvées ou envisagées ne sont qu'un moyen de dégager le contingent du nécessaire.

Dans la seconde classe, le jeu de couleur permet la constitution implicite d'une autre série :

46	pair	?
15	impair	oui
36	pair	oui
96	pair	oui

Cette série (nombre, parité, décomposition possible ou pas) met en jeu trois critères et permet la constitution de triplets non homogènes (nombre, pair, décomposition possible), (nombre, impair, décomposition possible) et (nombre, pair, indéterminé). Autrement dit, le jeu de couleur met en évidence la variation de parité des nombres au regard de la stabilité des possibilités de décomposition. Il est ainsi susceptible de générer un questionnement source d'une problématisation théorique.

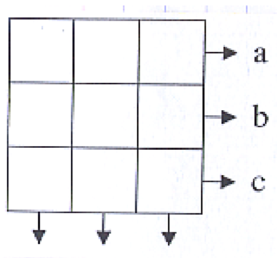
De fait, dans la classe, à partir du moment où l'enseignante organise cette série au tableau, les élèves construisent la nécessité « la parité n'a rien à voir avec la possibilité de décomposer ou pas 46. » Il ne faut pas exclure un effet cumulatif des actions de l'enseignante mais pour moi, cette organisation en série est une des raisons de leur réaction. En effet, comme je l'ai indiqué précédemment, les premiers aménagements du milieu ne fonctionnent pas : tout se passe comme si les élèves considéraient les rappels de la définition utiles seulement pour décider de la parité de 46, la présence à l'oral des faits « 46 est pair », « 36 est pair » « 15 est impair », isolés les uns des autres, ne suffit pas à invalider l'argument de parité. Mais les derniers aménagements du milieu qui constituent la série fonctionnent. Est-ce parce qu'ils correspondent à une mise en série écrite bien que non organisée spatialement ? Parce que la série est exhaustive ? Parce ce que cette mise en série est associée à la facette sociale du contrat didactique ? Ces hypothèses sont pour moi non exclusives les unes des autres, et peut-être même qu'il y a une variation selon les élèves.

5. Introduire une question dans le milieu

Dans un travail d'HDR, j'ai proposé une ingénierie didactique pour le cycle 3 visant à travailler sur ce que j'ai appelé « l'obstacle de l'empirisme naïf » (Hersant, 2010a). Cet obstacle consiste à justifier l'impossibilité mathématique par une impossibilité en acte (« c'est impossible car je n'ai pas réussi »). Pour cela, avec un groupe d'enseignants et de formateurs, nous avons fait travailler les élèves sur des problèmes d'optimisation discrète (Hersant, Thomas, 2009 ; Hersant, 2010a) : dans un premier temps, il s'agissait de trouver des solutions, sans chercher à obtenir la meilleure solution possible de façon à permettre l'émergence de conjectures puis, dans un second temps, d'établir des résultats faibles (« c'est possible car on l'a fait »), des preuves de courts-circuits (« c'est impossible car… ») et la preuve finale[1].

Le problème ci-dessous (figure 3) a posé une difficulté particulière dans l'ingénierie.

Placer dans la grille les nombres de 1 à 9 puis calculer la somme de chaque ligne et colonne. On note S la plus grande valeur ainsi obtenue. Placer les nombres dans la grille tel que S soit la plus petite possible.



Preuve attendue

Il y a une disposition des nombres telle que S = 15.

Par ailleurs, S ne peut être inférieur à 15 car a+b+c=45 (N1) et si a, b et c sont inférieurs ou égaux à 14 leur somme est inférieure ou égale à 42 (N2).

Donc S vaut 15.

Figure 3 : le problème « Carré magique » et sa solution

En effet, les élèves peuvent produire facilement des résultats faibles à partir de premières recherches (on peut faire 16, 17, 22, éventuellement 15). Ils peuvent aussi produire des conjectures à partir de leur expérience (15 est impossible, 14 est impossible). Ils peuvent prouver que S ne peut pas être égal à 9, 10 ou 11. Mais prouver que S ne peut être égal à 14 pose problème. En effet, pour cela est-il utile de savoir que a+b+c = 45 ? Or, cette connaissance n'a aucune raison d'être activée chez les élèves.

En effet, cette situation est proposée à la suite d'autres situations de même type (optimisation discrète) et est donc repérable par les élèves comme relevant d'une séance de résolution de problème où opère un macro contrat didactique de recherche (facette épistémologique, composante domaine). En particulier, les élèves savent que l'on attend des essais puis des conjectures, puis des preuves et, comme ils ne sont pas dans un contrat arithmétique, ils n'ont

[1] Pour le détail de ce travail d'ingénierie je renvoie à mon HDR disponible en ligne : http://magali.hersant.free.fr/articles/MC_HDR_Hersant_sansannexe.pdf

pas de raisons de chercher des égalités. De plus, dans la situation, rien n'évoque la somme des neuf premiers nombres, au contraire la phase d'énumération encourage à fonctionner uniquement avec des sommes de trois nombres en ligne ou en colonne. Se pose alors la question de comment introduire cette information dans le milieu (par une information ? par une question ?) et des effets de ce choix sur l'activité des élèves : qu'est-ce qu'on produit du point de vue du jeu sur le couple (contrat didactique, milieu) ? Sur l'adidacticité de la situation ? Sur les apprentissages des élèves ?

Le choix a été d'introduire la connaissance dans le milieu à partir d'une question. A partir d'une séance réalisée dans une classe de CM2, j'analyse l'effet de l'introduction de cette question dans le milieu sur l'activité des élèves.

A l'issue de l'énumération, les meilleures grilles produites dans les groupes sont affichées, les élèves montrent qu'on ne pas peut pas faire 13, 12… Ils ne savent pas trop quoi penser pour 14. L'enseignant demande de faire la somme des sommes obtenues sur les lignes « pour leur faire remarquer quelque chose ».

> P : je vais vous faire remarquer quelque chose d'abord […] Vous allez faire un petit peu de calcul mental et puis sur chacune des affiches, vous allez faire le total qui est là. Ces trois nombres là *sommes en lignes* […] donc les trois nombres qui sont là, les trois nombres là, les trois nombres là, c'est souvent les mêmes, hein. Les trois nombres qui sont là. Et…
> e : on trouve le même résultat
> P : et ça fait, comme certains disent, ça fait toujours le même résultat. Et ma question : c'est pur hasard ? C'est extraordinaire ? On a eu un coup de chance ou, si je changeai les nombres là, dans la grille ça ferait toujours… alors ça fait combien là ? 16 et 14 ça fait 30 et 15 ça fait 45. Là c'est les mêmes 3 fois 15 ça fait aussi 45. Là c'est le même qu'au début. Là 13 et 17 ça fait 30 et 15 45. Là c'est les mêmes. On arrive toujours à 45 au total. Mais question c'est : c'est un hasard ça ou c'est pas un hasard ? […] On va prendre 30 secondes pour que chacun réfléchisse dans sa tête à la question suivante : si je changeais ben tiens ouvrez donc votre cahier et prenez celle que vous avez faites au début est-ce que ça fait 45 ?
> pe : oui
> p : oui, c'est extraordinaire. […] *temps* J'attends que chacun essaie de réfléchir à cette question-là : pourquoi donc ça ferait toujours 45 ? […] Ben, oui forcément. 1+2+4+....+9 … ça fait 45. […] normalement, là on va toujours trouver 45.

Les questions de l'enseignant permettent d'introduire deux éléments dans le milieu : a+b+c=45 et 1+2+...+9=45 (N1). Ses interventions signifient l'utilité des éléments par un jeu sur la facette sociale du contrat didactique à un niveau macro. Dans le même temps, elles introduisent des éléments du contrat arithmétique par un jeu sur la facette épistémologique du macro-contrat au niveau du domaine. Le micro-contrat didactique est plutôt de production individuelle. Cette action de l'enseignant permet de produire l'argument visé et initie même un processus de recherche de preuve chez certains élèves (Dimitri).

> P : normalement, là on va toujours trouver 45. Alors Dimitri qu'est-ce que tu veux nous dire ?
> Dimitri : je voulais dire après que pour trouver c'est impossible 14 eh ben, il faut heu, il faut diviser 45 par 3 et tu trouves 15.
> P : j'ai pas bien suivi pourquoi donc il faudrait diviser 45 par 3. Y'en a qui comprennent pourquoi il faudrait diviser 45 par 3 ?
> Axel : moi je sais. *Il y a plusieurs mains levées*
> P : alors Axel ?
> Axel : On peut pas faire 14 parce que quand on divise 45 par 3 ça fait 15 et ici tu en enlèves un, alors t'es obligé d'en rajouter un.
> P : alors, honnêtement, pour moi dans ce problème, y' a pas de division du tout. Je ne vois pas pourquoi vous divisez 45 par 3. Alors, Jean.
> Jean : parce que pour nous, il y a 3 lignes
> p : oui

> Jean : et le résultat des trois lignes en même temps ça fera 45.
> p : alors la première ligne, plus la deuxième ligne, plus la troisième ligne, ça fait 45. Ouais. On est d'accord là-dessus.
> Sacha : 45 divisé par les trois lignes, ça fait
> P : ben, oui, mais pourquoi ? Qui est-ce qui a dit qu'il fallait qu'elles soient toutes égales. On fait une division par 3 quand on partage en parts égales. Mais qui a dit qu'il fallait que les parts soient égales, là ? […]
> P : Baissez vos mains et puis je vais vous proposer de réfléchir à la question suivante. On imagine, on imagine que quelqu'un, pour l'instant vous me dites que c'est impossible, mais heu… on est allé chercher un grand savant, prix Nobel de quelque chose, c'est peut-être un charlatan, on sait pas mais bon. Il nous dit : “moi j'ai réussi là, sur cette ligne là, ça fait moins que 15”. Mais il ne nous dit pas combien. “Et puis là c'est moins que 15 et puis là c'est moins que 15”
> pe : ah, non pas possible / impossible
> pe : c'est un charlatan
> P : attendez, “et puis là, pareil c'est moins que 15 et puis là aussi, ici c'est moins que 15” *il fait une grille au tableau avec en face de chaque ligne écrit “moins que 15”*
> pe : mais c'est pas possible
> pe : c'est un charlatan
> P : “et puis là, c'est moins que 15 et puis là c'est moins que 15 et puis là c'est moins que 15.”
> pe : c'est pas possible / c'est un charlatan
> P : on terminera là-dessus. La question que je vous pose c'est : est-ce que c'est possible ? et si vous dites que c'est un charlatan, il va être vexé, il suffit pas de dire que c'est un charlatan, qu'est-ce qui vous permet d'être sûr que ce qu'il dit là n'est pas vrai. Alors prenez le temps, vous retournez une dernière fois dans les petits groupes et essayez une dernière fois de vous mettre d'accord sur une explication… parce que si votre explication n'est pas solide, il va être vexé.

La référence au contrat arithmétique (facette épistémologique, niveau du macro-contrat didactique, clause « en arithmétique, on fait des opérations ») fonctionne bien, voire trop bien : les élèves cherchent des relations arithmétiques entre 45 et les données du problème, ils produisent des divisions (45:3=15) mais ne semblent pas attribuer d’importance au sens de ces divisions pour prouver qu’il est impossible d’avoir S=14. Il s’agit alors de ramener les élèves à un macro-contrat didactique de preuve. Pour cela l’enseignant complète encore le milieu de la situation en proposant une solution à moins de 15 (strictement) sur chaque ligne, proposée par une personne dont on ne sait pas si c’est un savant ou un charlatan. Il demande de statuer sur cette proposition, en justifiant sa réponse, de façon à éviter de vexer le savant / charlatan.

> Sacha : c'est impossible parce que 14 c'est le maximum qui est en-bas de 15, 14 fois trois ça fait en dessous de 45 et comme tous les nombres rajoutés ça fait 45 donc c'est pas possible.
> P : alors, voilà une façon de le dire. Hein. Moi j'ai dit plus petit que 15. Lui il nous dit : ben, si tout est plus petit que 15, le plus possible c'est 14 14 14. Le plus grand nombre entier en-dessous de 15 c'est 14. Donc le charlatan, il fera peut-être 14 14 14. 14 plus 14 plus 14 ça fait que 42. Ça ne fait pas 45, ça ne peut pas marcher.

Ce faisant, l’enseignant joue sur la facette sociale du contrat didactique au niveau micro (clause « quand le professeur propose un problème il attend qu’on le résolve ») pour soutenir un jeu sur le milieu. Il s’en suit que des élèves produisent N2 avec une part de responsabilité assez grande (micro-contrat de production collective).

Cet exemple illustre que l’introduction un peu abrupte dans le milieu d’une question, qui implique nécessairement un jeu sur le contrat didactique, ne modifie pas forcément la part de responsabilité des élèves dans la production même de la preuve. Mais je pense que cela a toutefois un effet non négligeable sur le rapport au savoir, et ici à la preuve, que l’on développe chez l’élève puisque *de facto*, la lecture que les élèves font de la situation didactique, *via* le contrat didactique, diminue leur part de responsabilité dans la nécessité de mobiliser un argument pertinent : produire un argument pertinent comme une nécessité pour résoudre le problème (mobilisation autonome de la nécessité de prouver en mathématiques) *vs* produire un argument pour se conformer aux attentes de l'enseignant ou éviter de vexer savant. Et cela a à voir avec le travail de construction de problème par les élèves en mathématiques et avec le jeu auquel on joue quand on fait des mathématiques en classe. Il me semble que si l'on ne prête pas attention à cela on prend le risque que l'activité mathématique des élèves soit privée de sa substantifique moelle.

EN GUISE DE CONCLUSION

A partir de ces exemples, j'ai montré qu'un appui sur le contrat didactique ne prive pas toujours l'élève d'une activité mathématique consistante. Au contraire le jeu sur le contrat didactique peut venir soutenir une action sur le milieu. L'étude des relations entre contrat didactique et milieu et de ses effets de l'activité de l'enseignant sur l'activité de l'élève est à poursuivre à partir d'autres cas, à différents niveaux de scolarité. La question de la sensibilité différente des élèves aux facettes du contrat didactique me semble aussi une question à explorer.

En mobilisant le cadre de la problématisation, j'ai aussi abordé la question des relations entre préserver une dose d'adidacticité à une situation et préserver la construction du problème. Il me semble là encore que des analyses plus nombreuses sont utiles pour comprendre les effets des jeux de contrat didactique et milieu sur l'activité mathématiques de l'élève et ses apprentissages.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309-336. Consulté à l'adresse http://guy-brousseau.com/2325/le-contrat-didactique-et-le-concept-de-milieu-devolution-1990/

BROUSSEAU, G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In *Actes de la 8ème Ecole d'Été de didactique des mathématiques* (Noirfalise., Perrin, p. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMITI, C., & GRENIER, D. (1997) Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(3), 81-102.

FABRE, M., & ORANGE, C. (1997) Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

HERSANT, M. (2001) *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Paris 7, Paris. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/122340/filename/these_Hersant.pdf

HERSANT, M. (2010a) *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* (Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches). Université de Nantes. Consulté à l'adresse https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches

HERSANT, M. (2010b) *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques.* (Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches). Université de Nantes. Consulté à l'adresse https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches

HERSANT, M. (2012) Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de pratiques ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires. In *Actes du Séminaire national de Didactique des mathématiques 2011* (p. 263-277). Paris : IREM Paris 7, ARDM.

HERSANT, M. (2013) Le contrat didactique et l'organisation de la rencontre des élèves avec le savoir. In *Pratiques enseignantes en mathématiques : expérience, savoirs et normes* (M. Hersant & C. Morin, p. 292). Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux.

HERSANT, M. (2014) Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(1), 9-31.

HERSANT, M., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005) Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1), 113-151.

HERSANT, M., & THOMAS, Y. (2009) Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3. In *Actes du 35è colloque de la Copirelem*. Bombannes : IREM de Bordeaux.

MARGOLINAS, C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori de situations. In *Les débats en didactiques des mathématiques, annales 1993-1994* (Margolinas, p. 89-103). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ORANGE, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *Aster*, *40*, 1–7.

PERRIN-GLORIAN, M. J., & HERSANT, M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(2), 217-276.

ROBERT, A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège à partir d'une vidéo filmée classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants, perspectives en formation d'enseignants. *Petit x*, *65*, 52-79.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technologies Education*, *2*(4), 505-528.

VANDEBROUCK, F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (Première édition). Toulouse : Octares Editions.

SAVOIRS, CONCEPTS ET SITUATIONS DANS LES PREMIERS APPRENTISSAGES EN PROGRAMMATION ET EN ALGORITHMIQUE

Jean-baptiste LAGRANGE et Janine ROGALSKI
LDAR, Université Paris-Diderot
jb.lagrange@casyopee.eu
rogalski.muret@gmail.com

INTRODUCTION

L'enseignement de l'algorithmique et de la programmation est revenu dans le curriculum récent sans référence à l'expérience acquise antérieurement, sans exploitation du questionnement laissé ouvert après des tentatives antérieures et sans tenir compte de l'existence de recherches menées dans des contextes divers, scolaires ou non. Cet article vise donc à rétablir les liens manquants de façon à ce que des recherches puissent se développer sans se priver de l'acquis de travaux menés depuis plus de trente ans sur les apprentissages en programmation et en algorithmique. Il est écrit par deux chercheurs travaillant dans le même laboratoire, mais appartenant à des champs différents, la didactique des mathématiques et la psychologie ergonomique. Dans de nombreux domaines de l'enseignement et de l'apprentissage, un double point de vue impliquant ces deux champs s'est montré pertinent et fructueux. Nous considérons ici les élèves et leurs apprentissages en programmation et en algorithmique tels que prescrits dans un contexte scolaire que nous allons préciser. La didactique des mathématiques dispose d'outils et de méthodes pour interroger la réalité de ces apprentissages : comment les élèves apprennent-ils, quelles difficultés rencontrent-ils, quels sont réellement les savoirs en jeu ? Au-delà de ce contexte et de cette prescription, les apprentissages concernent un domaine, l'informatique, à la fois champ scientifique et domaine professionnel. La psychologie ergonomique comprend un champ travaillant à la "psychologie de la programmation" et collabore avec une "didactique de l'informatique" en devenir. L'activité de programmation y est considérée au sens large incluant les différents aspects du développement logiciel et les apprentissages sont analysés dans la transposition de pratiques de la programmation et de savoirs informatiques. Ceci concerne les élèves que nous considérons ici en tant qu'"apprentis programmeurs" et l'enseignement qu'ils reçoivent en tant qu'"alphabétisation informatique". L'existence pérenne de la psychologie de la programmation depuis bientôt 30 ans rend incontournable la prise en compte de ses acquis dans toute recherche y compris sur des débutants.

Après avoir brièvement rappelé en introduction dans quelles conditions des apprentissages en programmation et en algorithmique ont pu exister antérieurement dans le curriculum scolaire, notre approche dans cet article consiste dans une première partie à mettre en correspondance certaines observations dans le contexte curriculaire récent, avec des phénomènes analysés dans un contexte plus ancien, de façon à assurer la continuité du questionnement sur les apprentissages en programmation et en algorithmique, par-delà les différences de contexte. Nous recherchons aussi dans une seconde partie comment la question des situations d'apprentissage s'est posée d'un contexte à l'autre. Ces deux premières parties s'appuient principalement sur l'expérience du premier auteur, avec un point de vue marqué par la didactique des Mathématiques. Le choix y est fait de conserver une position ouverte relativement aux savoirs en jeu : ces savoirs sont très peu spécifiés par le curriculum, et, nous allons le montrer, n'ont pas d'existence claire ni dans les mathématiques scolaires ni dans l'informatique en tant que domaine scientifique ou professionnel. Il s'agit de mobiliser les outils de la didactique comme science expérimentale pour mieux cerner ces savoirs et les situations qui y correspondent. La troisième partie répond à la nécessité d'élargir le propos au-delà des expériences isolées qui alimentent les deux premières parties. Elle s'appuie particulièrement sur l'expertise du second auteur pour proposer un bilan des acquis de la psychologie de la programmation, précédé par une présentation de ses acteurs et de son évolution. Ce bilan se particularise sur un champ conceptuel précisément identifié, celui de "variable informatique". Pour conclure, nous joignons les deux points de vue pour souligner les questions qui nous semblent prioritaires.

D'un contexte à l'autre

Au début des années 1980, l'ordinateur devient un objet assez accessible, mais sur les machines grand public ou pour l'enseignement, les usages possibles sont surtout limités à la programmation. Le livre d'Arthur Engel "Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt " parait en 1977 et est traduit en français au début des années 1980 (Engel, 1980). Il propose que les mathématiques scolaires mettent l'accent sur les algorithmes, leur construction et leur mise à l'épreuve plutôt que sur leur exécution. Le livre de Papert, "Mindstorm" sur les apports de la programmation Logo paraît aussi en français à la même époque (Papert, 1981). Ces ouvrages témoignent de ce que les activités de programmation sont vues par beaucoup d'innovateurs, comme pouvant contribuer aux apprentissages dans les domaines scientifiques existants, les mathématiques en premier lieu. Cela se traduit par quelques pratiques et groupes de recherche dans les IREM, sans toutefois qu'il y ait un impact sur le curriculum, au moins en France. En revanche, l'institution met en place un enseignement centré sur l'informatique comme champ scientifique, l'option informatique des lycées. Cette option se généralise très vite sous la pression des familles. Il s'agit d'offrir un nouveau champ scientifique, tout en soulignant les liens qu'il entretient avec les champs scolaires existants. Le volume horaire est de 2,5 h par semaine, avec le thème central des méthodes de construction de programmes. Ainsi, l'option informatique présente une forte dimension programmation (Baron, 1989).

Au tournant des années 1990, les activités de programmation disparaissent brusquement du curriculum du lycée, avec l'arrêt de l'option informatique et à d'autres niveaux scolaires les quelques pratiques existantes, surtout autour de Logo, s'arrêtent aussi. Les raisons sont complexes. Une raison peut cependant être soulignée : c'est l'irruption des progiciels comme le tableur, et aussi des applications dédiées comme le calcul formel et la géométrie dynamique qui donnent l'impression que l'enseignement tirera plus facilement profit de ces nouvelles applications que des activités de programmation. Ainsi Ruthven (1996) écrit:

> Building expertise and fluency in programming requires a considerable investment of time and effort, and imposes significant intellectual demands in its own right. In purely instrumental terms, newer tools, such as the spreadsheet, offer comparable power and versatility with lower overheads of technique and greater interactive flexibility. (op.cité, p.458)

La résurgence actuelle des activités de programmation peut aussi s'interpréter comme une prise de conscience, 20 ans après, de ce que d'une part les activités avec des progiciels ou des applications dédiées, ne sont pas non plus si faciles à mettre en œuvre, et de ce que, d'autre part, elles ne conduisent pas nécessairement à la compréhension des principes et méthodes qui sous-tendent leur conception.

OBSERVATIONS ET PHENOMENES DANS LE CONTEXTE ACTUEL ET DANS L'OPTION INFORMATIQUE

Nous retenons que l'expérience des années 1980 telle qu'évoquée par Ruthven, contredit l'idée d'un accès aisé des élèves à une expertise suffisante pour que les activités en programmation et algorithmique puissent contribuer à des apprentissages. Nous recherchons, à travers des exemples pris dans des travaux de recherche, comment des questions liées la construction de cette expertise se posent dans les deux contextes, et comment elles renvoient à des savoirs et aux situations qu'il est nécessaire de mettre en place pour que les élèves se confrontent à ces savoirs ou concepts. Nous considérons dans cette première partie deux exemples de difficultés résistantes l'une ayant trait de façon générale aux spécificités d'un langage informatique et l'autre portant plus particulièrement sur le statut donné aux "conditions" dans le langage informatique

Les spécificités d'un langage informatique

Nous avons repéré cet exemple dans une thèse récente (Briant, 2013). L'auteure note le changement institutionnel que constitue l'introduction, dans toutes les classes de la voie générale du lycée, de l'algorithmique en mathématiques. Parmi les questions abordées dans la thèse, on trouve la contribution de ce nouvel enseignement à la compréhension des concepts mathématiques et plus particulièrement l'apport de l'algorithmique à l'apprentissage de concepts algébriques, ce qui rejoint un thème ayant déjà fait l'objet de recherches dans les années 1980, notamment par Tall et Thomas (1986). Elle présente une situation dont l'objectif est de montrer aux élèves que la résolution de certaines équations peut se faire de manière algorithmisée, et ainsi de les amener à comprendre que la reconnaissance de la nature et de la forme d'une équation leur permet de choisir dans" leur catalogue cognitif de techniques". Une première tâche, que nous prenons en exemple, consiste pour les élèves à réaliser un algorithme prenant en entrée trois réels a, b et c, et donnant en sortie la solution quand elle existe et est unique de l'équation ax+b=c, ou un message adéquat dans les autres cas. Briant (2013) donne une variété de solutions d'élèves dont nous extrayons certaines dans le tableau 1.
La solution attendue est proche de la solution "élève" n°1 du tableau 1. Pour que cet algorithme soit complet, il faudrait que l'élève traite par deux alternatives les différents cas où n'existe pas une solution unique (en l'état, l'algorithme est en erreur dans le cas a=0). Certains élèves produisent cette solution. Elle témoigne d'une prise de conscience de la capacité du dispositif à traiter une formule écrite dans une syntaxe très proche de l'algèbre habituel, en instanciant les trois paramètres selon les valeurs données en entrée. Il est attendu que les élèves rencontrent la particularité du cas a=0 lors de l'exécution, ce qui les conduira à considérer la résolution de cette équation de façon plus générale. D'autres élèves produisent des solutions du type de celles numérotées 2 et 3 dans le tableau. Elles témoignent d'une incompréhension du langage informatique, de la séquencialité et des variables. Les élèves essaient simplement de traduire l'équation avec les éléments syntaxiques du langage, soit par une affectation (Solution "élève" n°2), soit par une condition (Solution "élève" n°3). Les solutions du type de celle numérotée 4 dans le tableau sont aussi très souvent rencontrées : la variable I prend les valeurs successives du second membre lors d'une résolution en papier/crayon. Comme le note l'auteure, l'élève code les actions successives lors de cette résolution. Le programme est syntaxiquement correct et donne bien la valeur attendue, mais reste distant de de la solution attendue.

Solution"élève" n°1 DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b LIRE c x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a AFFICHER x FIN_ALGORITHME	Solution"élève" n°3 DEBUT_ALGORITHME SI (ax+b=c) ALORS DEBUT_SI FIN_SI FIN_ALGORITHME
Solution"élève" n°2 DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b c PREND_LA_VALEUR aX+b FIN_ALGORITHME	Solution"élève" n°4 DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b LIRE I I PREND_LA_VALEUR I-b I PREND_LA_VALEUR I/a x PREND_LA_VALEUR I AFFICHER x FIN_ALGORITHME

Tableau 1: quatre solutions pour une équation du 1er degré. D'après Briant (2013 p. 414)

Voici comment des difficultés de même type ont été observées et analysées dans le contexte de l'option informatique (Lagrange, 1991). Il s'agit d'une séquence d'apprentissage sur le type chaine de caractères en classe de Seconde, dont l'objectif général était la prise de conscience par les élèves du caractère calculable des objets du langage correspondant à ce type. Cette séquence était conçue comme une remédiation, les élèves ayant déjà eu une quarantaine d'heure en option et ayant été initiés au type chaîne de caractères Nous analysons ici une tâche (tableau 2) servant à une évaluation diagnostique en préalable à la séquence.

Enoncé
On donne le programme
`Lire X`
`A←souschaine(X,1,1)`
`L←longueur(X)`
`B←souschaine(X,L,1)`
`afficher A;B`
1. Indique ce que l'ordinateur affiche pour l'entrée de "BONJOUR", de"B"
	2. Ecris un programme pour que l'utilisateur ayant entré une chaîne, l'ordinateur affiche la chaine en passant la première lettre à la fin
	(BONJOUR → ONJOURB)
	3. Ecris un programme pour que l'utilisateur ayant entré une chaîne, l'ordinateur intervertit la première lettre et la dernière (TALUS→ SALUT)

	Réponse d'élève aux questions 2 et 3
	`2. A←souschaine(X,2,L+souschaine(1,1))`
	`3. A←souschaine(X,2,L+souschaine(1,1))`
	`A←souschaine(X,1,L-1+souschaine(5,1))`

Tableau 2 : une tâche sur les chaînes; l'énoncé et une réponse d'élève aux questions 2 et 3

Dans le texte de la tâche (Tableau2), les deux fonctions principales, `longueur` et `souschaine` étaient d'abord rappelées. Dans une première question, il s'agissait d'interpréter un petit programme. Cela donnait aussi une sorte de modèle pour la suite. Dans les deux autres questions, il était demandé de créer un programme de même nature ; le langage était volontairement proche d'un traitement "à la main" (passer, intervertir…) plutôt que d'un calcul. Pour la première question, les résultats avaient été donnés correctement sauf par un élève qui donnait B au lieu de BB pour l'entrée de la lettre B. Pour la seconde et la troisième question, environ la moitié des élèves ne donnaient pas une réponse qui représentait le calcul d'une chaîne. Le tableau 2 donne une réponse typique d'élève aux questions 2 et 3. On voit qu'il y a bizarrement l'addition d'une variable représentant probablement la longueur (mais non affectée) et d'un appel à `souschaine` incorrect puisqu'avec deux arguments seulement. La première ligne de la réponse à la question 3 reprend la réponse à la question 2 : l'élève a d'abord passé le premier caractère en dernier. La seconde ligne correspond au traitement du dernier caractère de la chaine initiale. On remarque que l'élève affecte le résultat à la même variable dans les deux lignes.

L'épreuve a été suivie d'un entretien devant l'ordinateur avec certains élèves ayant donné ce type de réponse. Nous analysons un entretien typique. Dans cet entretien, l'observateur a d'abord tenté une correction syntaxique, soulignant notamment l'absence d'affectation à L, l'addition d'un nombre et d'une chaîne et l'absence d'une instruction de sortie du résultat. Il a constaté que les corrections apportées ne faisaient pas sens pour l'élève. Revenant à la réponse de l'élève à l'épreuve, il a demandé ce que cette réponse signifiait pour elle. Voici une partie de l'entretien entre l'observateur (O) et l'élève (E).

> O. Tu avais mis un"+" ici, que signifie-t-il ?
>
> E. Ben, là… j'avais écrit `BONJOUR` donc `X,` à partir de la deuxième, on prend la longueur totale, plus la première lettre, on en prend une.
>
> O. C'est quoi `souschaine(1,1)` …?
>
> E. La longueur de `X` et `1 et 1`

Les réponses montrent que cette élève se servait des fonctions sur les chaînes pour coder des actions et non pour faire des calculs. `L+souschaine(1,1)` veut dire :"on prend la longueur totale, plus la première lettre". L'affectation n'a pas de signification, elle est là simplement pour la syntaxe, c'est pourquoi elle est répétée sur la même variable. Pour l'élève, `souschaine(1,1)` veut dire "la longueur de X et 1 et 1". On est bien dans une action sur un objet concret qu'il n'est pas nécessaire de renommer. On remarque dans la seconde ligne de la question 3 que l'élève opère sur `X`, comme si cette chaine avait été transformée par la première, puisqu'elle commence à 1 et s'arrête à `L-1`. Les remédiations opérées auprès d'élèves dans la suite de la séquence ont consisté en une série d'exercices du même type, traités en entretien devant l'ordinateur, l'intervenant essayant de comprendre avant de corriger. Elles ont été relativement payantes puisque dans une épreuve à la fin de l'année, ces élèves très en difficulté obtenaient des résultats semblables au reste de la classe. Cette recherche et d'autres que nous étudierons en seconde partie, amènent à penser que cette absence de prise de conscience des spécificités d'un langage informatique, est une difficulté importante sur la voie de l'expertise nécessaire pour que les objectifs curriculaires relatifs aux activités en programmation et en algorithmique soient atteints.

Le statut donné aux "conditions" dans le langage informatique

Dans un second exemple pris dans le contexte actuel de l'algorithmique au lycée, nous allons montrer comment l'écriture d'alternatives pose la question du statut donné aux "conditions" par les élèves et comment une enseignante bien préparée peut se trouver désarçonnée par les difficultés que cela entraîne pour la gestion de la situation. Puis nous irons plus loin dans l'analyse de cette difficulté et de son traitement en reprenant ici aussi une recherche menée dans le cadre de l'option informatique.

L'extrait suivant est tiré d'un épisode observé dans le cadre d'un mémoire de master (Guy, 2013) mettant en place une ingénierie sur laquelle nous reviendrons en seconde partie de cet article. Il s'agit d'une phase de mise en commun après la construction d'un traitement itératif devant se terminer quand une variable A prend une des deux valeurs 495 ou zéro. Il s'agit d'une bonne classe de terminale qui fait de l'algorithmique depuis la seconde. L'auteure du mémoire qui a préparé l'ingénierie la met en place en prenant la place de l'enseignant (P dans le dialogue) Le professeur de la classe est là en tant qu'observateur (O). Le langage choisi impose une itération Tant que, c'est-à-dire avec une condition de continuation en début de boucle. L'extrait est une discussion collective qui fait suite à ce qu'un groupe (« les filles devant") a écrit la condition de continuation sous la forme (A différent de 495) ou (A différent de 0) et ne comprennent pas pourquoi l'exécution ne termine pas.

> P : ..vous les filles devant, vous m'avez dit que le test qu'on fait là c'est A différent de 495 **ou** A différent de 0, au fond, tu m'as dit. . .
>
> E3 : A différent de 0 **et** A différent de 495.
>
> P : Alors, qu'est-ce qui est correct, qu'est-ce qui ne l'est pas ? … Oui ?
>
> E7 : Ben moi ça me parait bizarre qu'un nombre soit égal à deux nombres différents.
>
> P : Voilà, donc, quand tu dis le et, tu vois, un nombre qui est différent de deux nombres, c'est vrai, tu vas trouver des nombres qui sont différents de 495 et différents de 0. .. Mais tu vas jamais satisfaire la condition être égal à 495 et à 0. … Finalement, ton algorithme, il s'arrêtera quand tu obtiendras un nombre égal à 495 et à 0, d'accord ? Et ça tu vas pas pouvoir le trouver.
>
> E3 : On l'a fait fonctionner et ça a marché.
>
> P : Tu l'as fait tourner et ça marche. . .
>
> O : Tu l'as fait. . . Ça devrait pas marcher.
>
> P : Oui, mais, AlgoBox il a des conditions d'évaluation des. . .
>
> …
>
> P : Bon, on va y réfléchir, c'est une question à laquelle il faut réfléchir …

L'enseignante P essaie de provoquer un débat. Un autre élève E3 corrige sans plus d'explication. Une élève E7 fait une intervention peu explicite, mais on imagine qu'elle pense à ce qui ferait sortir de la boucle, c'est-à-dire la négation de la condition (A<>495) et (A<>0), qu'elle conçoit comme (A=495) et (A=0),
L'enseignante reprend cette idée, mais de façon assez confuse, puisqu'elle considère en même temps une condition de continuation correcte "des nombres qui sont différents de 495 et différents de 0" et une condition d'arrêt fausse "être égal à 495 et à 0". La discussion tourne court, quand l'élève E3 qui a corrigé propose une validation pragmatique, reprise par le professeur. Le débat est relancé par l'observateur qui a dû être embrouillé par l'explication car il semble très étonné que la condition avec le "et" fonctionne. Mais la discussion reste sur le plan pragmatique, l'enseignante faisant référence au logiciel et non plus à la logique, et, après une phase assez confuse, clôt le débat. Dans son mémoire, l'enseignante dit qu'elle ne s'était pas préparée à ce problème. Pourquoi une enseignante bien formée, intéressée par l'algorithmique puisqu'elle fait son mémoire sur ce sujet est-elle ainsi prise au dépourvu ? Pourquoi ne reprend-elle pas la remarque de E7, en l'exprimant en termes de condition d'arrêt, et en soulignant que la condition dans le tant que est une condition de continuation, négation de la condition d'arrêt ? Ceci suggère que les difficultés liées aux conditions (valeurs logiques de type booléen) sont sous-estimées. La ressemblance entre ces conditions et celles que l'on exprime dans le langage "ordinaire" est trompeuse dès que les conditions deviennent un peu complexes, notamment lorsqu'elles imposent l'emploi de connecteurs.

Comme annoncé, nous précisons cette hypothèse en revenant sur une recherche menée dans le cadre de l'option informatique. Lagrange (1991) présente une ingénierie sur le type booléen expérimentée avec des élèves dans leur deuxième année d'option dans une classe scientifique après que les élèves aient été initiés à ce type de données. Cette ingénierie reposait sur deux problèmes. Chaque problème a donné lieu à une série de tâches en papier crayon et sur ordinateur que nous ne détaillons pas ici. Le tableau3 donne l'énoncé du premier problème, une solution attendue et une solution "élève" typique. L'énoncé est conçu pour confronter les élèves aux spécificités des booléens. Une première spécificité est que l'entrée ou la sortie d'une valeur logique ne peut se faire directement, elle doit se faire via une chaîne de caractère. Une seconde spécificité est que les calculs sur ce type se font via des connecteurs logiques (conjonction, disjonction…) dont la similarité avec les expressions du langage courant est trompeuse, comme nous l'avons vu avec l'exemple précédent. Ainsi, l'énoncé présente une rupture entre d'une part la première et la seconde condition qui peuvent s'exprimer sous une forme proche du langage courant, et d'autre part la troisième qui implique d'articuler trois variables dans une formule non triviale.

<table>
<tr><td colspan="2">Enoncé
J'ai 5 amis : Marie, Marc, Jean, Janine et Jean.
"Marie et Jean ne s'entendent pas”
"Marc et Marie ne viendront pas l'un sans l'autre
"Si j'invite Janine, il faut que j'invite Luc ou Jean, mais on ne peut pas les inviter tous les trois ensemble"
Après avoir déclaré 5 variables booléennes, chacune prenant la valeur vraie si la personne correspondante est invitée, écrire un programme qui permet de savoir si une invitation est possible.</td></tr>
<tr><td>Solution attendue
display 'Marie invité(e) (O/N)'
read Rep
Marie :=(Rep='O')
….
C1:=Not (Marie and Jean)
C2:=(Marc=Marie)
C3:=(Luc ≠ Jean) or not Janine
If C1 and C2 and C3 then
     display 'Possible'
 else
display 'Impossible'

         ……</td><td>Une solution "élève" typique
display 'Marie invité(e) (O/N)'
read Rep
If Rep='O' then
   Marie :=true
else
    Marie :=false
…
If (Marie and Jean) then
     display 'Impossible'
else
     if (Marc<>Marie) then
          display
     'Impossible'
     else…</td></tr>
</table>

Tableau 3 : un problème sur les booléens et deux amorces de solutions

Les solutions diffèrent d'abord quant à l'affectation d'une valeur logique aux variables booléennes après l'entrée d'une chaine de caractères. La solution attendue utilise l'affectation d'une condition à la variable, tandis que la solution "élève" passe par une alternative. Cette utilisation d'une alternative témoigne de ce que les conditions ne sont pas conçues par l'élève comme une formule dont le calcul a pour résultat une valeur logique. Par la suite, la solution attendue exprime les trois conditions et les affecte séparément à trois variables booléennes. Une alternative finale conditionnée par la conjonction des trois variables permet la sortie de la réponse. Pour l'expression des clauses, la solution "élève" typique privilégie à nouveau la structure alternative, en emboîtant plusieurs instances. Ceci permet une expression congruente à l'énoncé pour les deux premières conditions et évite le recours à la négation. Les solutions recueillies ne vont pas plus loin, car les élèves échouent à exprimer la troisième condition de cette manière. Notre interprétation est que les élèves conçoivent les expressions booléennes comme des "conditions" telles qu'elles s'expriment dans le langage usuel, plutôt que comme un calcul sur des valeurs logiques.

Nous ne détaillons pas davantage l'ingénierie. Lagrange (1991) montre une difficile progression de ces élèves d'un bon niveau scientifique ayant été initiés au type booléen par leur professeur dans le cadre du programme de l'option. Ils restent attachés aux alternatives et très réticents à l'emploi de variables booléennes. Une progression souvent constatée est l'emploi d'un type connu. Par exemple les élèves déclarent une variable numérique à laquelle ils affectent 0 ou 1, ou une chaîne à laquelle ils affectent "OUI" ou "NON". Dans le premier cas, les conditions peuvent alors être calculées -par exemple (AxB=1) exprime la conjonction, ce qui constitue une étape vers la compréhension des booléens. Le second problème, repris par Lagrange (2002), vise à ce que les élèves construisent et utilisent le codage d'un graphe sous forme d'un tableau de booléen. L'ingénierie serait d'actualité par exemple dans le contexte des graphes et de l'algorithmique au lycée.

Quels savoirs sous-jacents ?

Nous avons commencé cette première partie en soulignant que l'expérience des années 1980 contredit l'idée d'un accès aisé des élèves à une expertise suffisante pour que les activités en programmation et algorithmique puissent contribuer aux apprentissages visés. Nous avons vérifié à l'aide d'exemples que ceci reste vrai dans le contexte actuel de l'algorithmique au lycée. Faisant le lien avec des exemples similaires dans le contexte de l'option informatique, nous avons analysé quelques aspects de cette question, que l'on peut résumer par la difficulté rencontrée par les débutants à prendre conscience des spécificités d'un langage informatique, c'est-à-dire plus précisément d'un langage destiné à être exécuté par un dispositif opérant en différé. Ceci se traduit notamment par une difficulté à interpréter les formes de ce langage comme exprimant un calcul sur des objets. Nous avons essayé de montrer que ces difficultés ne sont ni anecdotiques ni passagères. C'est pour nous l'indice qu'il existe des savoirs sous-jacents. Les exemples étudiés suggèrent un lien avec l'accès au symbolisme algébrique comme outil de modélisation et à la logique propositionnelle, mais sous une forme différente de la façon dont ces contenus sont abordés dans les mathématiques scolaires. Nous ne trouvons pas non plus ces savoirs ou concepts dans l'informatique telle qu'elle s'enseigne, l'expertise visée étant considérée comme un prérequis dans les cursus et ouvrages de référence. Dans la seconde partie, nous abordons la question des situations d'apprentissage, en mobilisant pour cela les outils de la didactique des mathématiques.

QUELLES SITUATIONS POUR LES PREMIERS APPRENTISSAGES ?

Dans la première partie, nous avons souligné les difficultés rencontrées par les débutants et leur similarité dans les deux contextes de l'option informatique dans les années 1980 et dans le contexte actuel de l'algorithmique au lycée. Nous avons montré que ces difficultés se manifestaient chez des élèves même après un premier enseignement tourné vers la programmation et esquissé quelques remédiations développées dans le premier contexte. Ce constat montre la nécessité, après avoir mieux cerné les savoirs et concepts sous-jacents à cette "alphabétisation", de réfléchir aux situations d'apprentissages. Nous le faisons à partir d'une synthèse opérée dans les 1980. Cette synthèse ne concerne pas l'option informatique qui n'a pas donné lieu à beaucoup de travaux critiques sur les pratiques en classe. Crahay (1987) s'est intéressé aux hypothèses émises, dans la lignée de Papert (1981), sur les apports des activités de programmation en LOGO à la "pensée procédurale", c'est-à-dire à la capacité de penser une série d'actions comme une procédure paramétrable et réutilisable dans un traitement plus complexe. LOGO est en effet un langage où l'on écrit des procédures qui peuvent s'appeler les unes les autres et de nombreux travaux de recherche ont recherché ses effets. Crahay fait une revue des évaluations, et conclut qu'elles ont toutes montré des résultats décevants. Il met en cause particulièrement les pratiques des enseignants qui au départ laissent une grande liberté aux apprenants dans la construction de programme, mais ensuite se limitent à de interventions individuelles auprès des élèves et finissent par écrire le programme à leur place. Il conclut que les activités de programmation en Logo peuvent être l'occasion de "progrès cognitif incomparables", mais qu'il faudrait pour cela

> «1) une théorie de l'expertise qui décrit la performance terminale ou la structure de connaissance achevée que nous espérons faire acquérir par l'apprenant,
>
> 2) une théorie de l'acquisition qui décrit le processus de construction de la connaissance ou de la performance visée ou autrement dit les étapes par lesquelles les sujets transitent lorsqu'ils acquièrent cette compétence,
>
> 3) une théorie de l'intervention qui suggère quelles conduites d'enseignement sont susceptibles de stimuler le processus d'acquisition et qui fournit par le fait même une information utile pour savoir comment s'y prendre avec l'apprenant ». (Crahay, 1987, p. 53)

Nous souhaitons montrer dans cette partie comment la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988) a pu, dans certaines recherches, encore très modestes, répondre aux conditions posées par Crahay. Nous insistons en particulier sur la mise en place d'un milieu adéquat, à partir d'une analyse épistémologique ou psychologique des savoirs sous-jacents à l'alphabétisation et sur la mise en place de phases a-didactiques de confrontation des élèves à ce milieu. Il s'agit ainsi de rompre avec le constructivisme naïf dénoncé par Crahay, où partant de situations très ouvertes, l'élève est finalement conduit par l'enseignant pour l'écriture d'un programme.

D'une étude épistémologique du développement des machines et langages à une situation d'apprentissage de l'itération

La première recherche considérée ici est la thèse de Nguyen (2005) menée dans le contexte des programmes de mathématiques du lycée des années 2000. Nguyen s'intéresse à l'itération et montre que c'est une structure qui émerge dans l'évolution des calculatrices ou machines mathématiques de la calculatrice simple à la machine de Babbage. Cette dernière machine était conçue pour tabuler des fonctions de façon automatique, grâce à deux innovations : (1) un emplacement mémoire correspondant à une donnée invariante au cours d'un calcul répétitif peut prendre successivement des valeurs différentes, (2) le contrôle de l'exécution est fait non par l'opérateur, mais par la machine en fonction de l'état de la mémoire, ce qui rend notamment possible l'itération. La structure la plus récente est celle de l'ordinateur moderne où le processeur exécute un programme lui-même considéré comme une donnée, ce qui permet le contrôle de l'exécution par la machine de façon beaucoup plus souple. La situation d'apprentissage est basée sur cette étude. Il s'agit de confronter les élèves à la tabulation de fonctions dans des situations où il devient avantageux d'abord d'utiliser des mémoires, puis d'organiser l'activation des calculs et des mémoires dans une structure se répétant et finalement d'imaginer une instruction de répétition.

Les élèves ont des calculatrices simples, sans parenthèse, mais disposant de mémoires A, B, C pouvant stocker le résultat d'un calcul. La situation met aussi en scène un robot capable d'appuyer sur les touches de la calculatrice à partir d'une liste de touches fournie sur papier. La première tâche (T1, Tableau3) implique l'écriture fastidieuse d'une série de touches. Comme on le voit en partie droite, pour un pas de 0,2, il y a 26 séries de touches, chaque série commençant par l'entrée d'une valeur de la variable qui est stockée dans la mémoire A. Pour un pas de 0,03, il faudrait 166 séries de touches. Les élèves voient donc l'intérêt d'une suite invariante qui pourrait être répétée, ce qui est l'objet la tâche T2. Mais cela implique une rupture, puisque dans une suite invariante chaque valeur de la variable ne peut plus être entrée individuellement. Dans la réponse donnée en partie droite du tableau 3, le calcul itératif des valeurs de la variable utilise une seconde mémoire B, l'élève ne voulant sans doute pas que la valeur dans la mémoire A soit perdue, bien que la suite invariante puisse utiliser une seule mémoire comme dans la réponse à la tâche T3. Dans cette dernière tâche les élèves doivent imaginer une structure dans laquelle insérer cette suite. Cette structure comprend une instruction spéciale de répétition quantifiée et une initialisation de la mémoire utilisée. On remarque dans la réponse donnée en partie droite que l'élève s'est trompé dans le nombre d'itérations : la valeur 1,98 est calculée, mais son image n'est pas affichée.

<table>
<tr><td colspan="2">Enoncé :"Soit f une fonction. Calculer les images par cette fonction de nombres espacés d'un pas donné dans un intervalle donné» f(x)=x²+1, intervalle [-3,2], pas 0,2 puis 0,03
Calculatrice avec mémoires STO</td></tr>
<tr><td>T1 Ecrire la suite des touches nécessaire pour la faire exécuter par un robot</td><td>- 3 Sto A A x A+1=
-2.8 Sto A A x A+1=
-2.6 Sto A A x A+1=
…
2 Sto A A x A+1=</td></tr>
<tr><td>T2 Ecrire un groupe de touches à faire répéter par le robot</td><td>Groupe de touches à répéter :
. A + 0,03 → STO B
. B x B + 1 =
. B STO A</td></tr>
<tr><td>T3 Ecrire un message le plus court possible pour que le robot fasse tout le calcul de lui-même</td><td>-3 STO A
répéter 166 fois A x A + 1 =
A + 0,03 STO A</td></tr>
</table>

Tableau3. Une situation d'apprentissage de l'itération : l'énoncé, les trois tâches (à gauche), et les réponses d'élève (à droite). D'après Nguyen et Bessot (2010).

La planification dans la construction d'un algorithme par des élèves

A la différence de l'exemple précédent qui partait d'une étude épistémologique, nous nous intéressons ici à une problématique issue de la psychologie de la programmation. Comment des débutants peuvent-ils construire un algorithme ou un programme tenant compte des spécificités d'un langage informatique ? Rogalski et Samurçay (1990) ont introduit cette problématique en distinguant les positions d'expert et de novice dans l'activité de "planification", c'est-à-dire de conception des étapes dans l'écriture d'un programme. Elles introduisent deux autres notions : les "schémas" qui sont les structures utilisées dans le traitement des informations pour atteindre des objectifs à petite échelle, et les "plans" qui sont des ensembles organisés de schémas. Les experts combinent généralement une approche descendante (top-down) où le plan est d'abord pensé, puis organisé en schémas élémentaires et une approche ascendante (bottom-up) qui part de schémas connus pour les organiser en plan. De façon générale si l'expert voit bien où il va, il construit un plan et ensuite s'intéresse à des sous-objectifs et aux structures correspondantes. Quand il voit moins bien comment commencer, il peut partir des schémas qu'il connait. Le problème des débutants est qu'ils ne disposent pas d'un répertoire de schémas et que les plans auxquels ils pensent sont directement transposés d'une exécution manuelle ce qui rend difficile la spécification des sous-objectifs pour un dispositif informatique. Donc ils ne peuvent faire ni une approche descendante ni une approche ascendante.

Nous nous sommes intéressés à cette problématique pour l'encadrement d'un mémoire de master (Guy, 2013) et l'écriture d'un article (Lagrange & Guy, 2015) avec l'auteure du mémoire. Le contexte est celui de l'algorithmique au lycée et donc cette étude s'intéresse aussi aux interactions math-algorithmique. Un travail autour de l'algorithme de Kaprekar a été retenu de façon à mettre en jeu, à côté des savoirs mathématiques, des savoirs en programmation ou algorithmique, relatifs à la planification. Les savoirs mathématiques concernent la représentation des nombres, et plus généralement l'arithmétique.

1. Choisir un nombre entier de trois chiffres.
2. Former le nombre obtenu en arrangeant les chiffres du nombre choisi en 1. dans l'ordre croissant.
3. Former le nombre obtenu en arrangeant les chiffres du nombre choisi en 1. dans l'ordre décroissant.
4. Calculer la différence des nombres obtenus en 2. et 3.
5. Recommencer (à partir de l'instruction 2.) avec le résultat obtenu en 4, jusqu'à obtenir un nombre déjà obtenu.

Tableau 4 : L'algorithme de Kaprekar

Le traitement concerné est présenté dans le tableau 4. Il est discuté plus complétement par Lagrange et Guy (2015). Nous avons mis en place une situation didactique reposant sur le fait que dans ce traitement, le nombre courant est considéré sous deux représentations. Pour le tri (rangement dans l'ordre croissant ou décroissant) aux étapes 2 et 3, c'est un triplet de chiffres et pour la soustraction c'est un nombre au sens habituel du terme. A la main, la différence de représentation n'apparait pas. Un opérateur humain n'a pas conscience d'isoler des chiffres et de les ordonner aux étapes 2 et 3. Le traitement par une machine "arithmétique", c'est-à-dire disposant des 4 opérations dans les entiers et d'instructions de comparaison, impose de considérer le nombre courant sous ses deux représentations et donc de construire des étapes de conversion du nombre ordinaire en triplet et inversement. La situation s'adresse à des élèves de Terminale et la question qui leur est posée est celle de la terminaison de l'algorithme. Après qu'ils aient constaté sur quelques exemples que le traitement termine soit sur 0 soit sur 495, il est demandé aux élèves de concevoir un traitement dans leur environnement de programmation habituel de façon à examiner la généralité de ce constat[1]. La conception de la situation repose sur les hypothèses suivantes : (1) spontanément, les élèves vont s'engager vers un plan calqué sur l'exécution manuelle, car ils ne disposent pas des schémas de décomposition et de recomposition d'un nombre (2) par confrontation au dispositif "arithmétique" il peut se produire une prise de conscience de la nécessité d'aménager le plan du traitement, et plus généralement de ce qu'un plan convenant à un traitement manuel doit être adapté en fonction des capacités du dispositif destiné à l'exécuter.

Précisons le milieu. Il est constitué en premier lieu des données à traiter. Ici il s'agit d'objets mathématiques avec leurs propriétés arithmétiques qui exercent certaines rétroactions. Ce sont aussi des objets à codifier pour un traitement destiné à être exécuté par un dispositif exprimé dans un langage symbolique. Les rétroactions du langage résultent de contraintes d'expression et de représentation perçues de façon formelle, (cette écriture n'est pas "conforme") ou en référence à un dispositif (l'ordinateur ne va pas comprendre) et souvent les deux à la fois.

Nous résumons ici les choix pour la mise en œuvre : les fonctionnalités du langage sont

[1] Un prolongement, mis en place dans le cadre d'un travail de thèse concerne la preuve de de ce résultat (Laval 2015).

limitées aux fonctions arithmétiques et au traitement de listes, la structure itérative est du type `tant que` avec une condition de continuation sur deux valeurs, ce qui est plus simple que le repérage d'un invariant ou d'un cycle et permet de laisser la conception de cette condition à la charge des élèves (voir la première partie.) Un autre choix essentiel est de mettre l'accent sur la représentation des données (choix des variables) pour engager une dynamique de planification productive : pensant à un plan calqué sur l'exécution manuelle, les élèves vont d'abord se contenter d'une variable pour le nombre courant et éventuellement de variables pour les nombres obtenus par rangement croissant et décroissant des chiffres; il est possible que certains élèves perçoivent que, pour un traitement par une machine, il est nécessaire de prévoir les variables sur lesquelles opérer le rangement des chiffres du nombre courant ; si ce n'est pas le cas, l'enseignant peut enclencher cette réflexion en demandant aux élèves si leur choix permettrait le traitement par exemple d'un nombre à 10 chiffres. La prise de conscience de la nécessité de variables pour les chiffres devra ensuite engendrer le besoin de sous-algorithmes de décomposition et de recomposition d'un nombre.

Les 4 phases en résultent de ces choix. Dans une première phase, il est demandé aux élèves quelles variables sont à déclarer, et on s'attend, comme nous venons de le dire, à ce que se produise une prise de conscience de la nécessité d'introduire une ou des variables pour les chiffres du nombre courant, soit sous forme d'une liste à trois éléments numériques, soit plus simplement avec trois variables numériques. Ensuite on peut penser que cette prise de conscience va être partagée dans la classe et qu'un plan incluant des sous-algorithmes de conversion va être identifié. Dans une seconde phase, les élèves conçoivent les trois sous-algorithmes de la figure 1. Dans un esprit de modularité, les sous-algorithmes sont confiés à des groupes différents. La troisième phase consiste à rédiger l'algorithme complet en organisant les sous-algorithmes dans une itération. Il ne s'agit d'une simple concaténation. En effet les sous-algorithmes ont des déclarations de variables spécifiques qui doivent être harmonisées (figure 1). De même pour le nombre entré dans le premier sous-algorithme doit être harmonisé avec le nombre rendu par le 3ème. Les élèves ont aussi à construire l'itération avec une condition d'arrêt adéquate (épisode discuté en partie I).

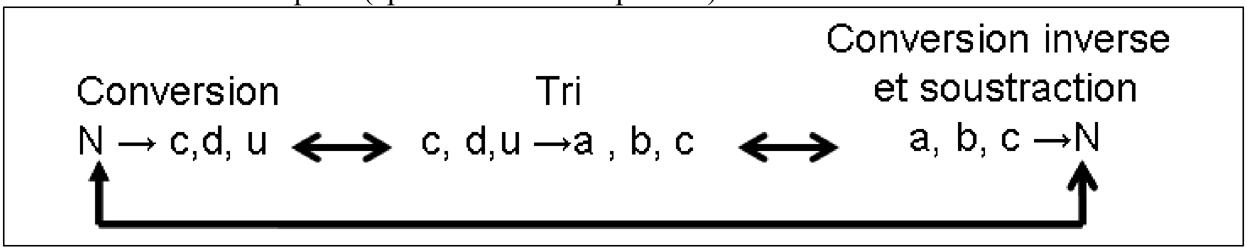


Figure 1 : Les trois sous-algorithmes du corps de boucle et l'harmonisation des variables

Voici quelques éléments d'analyse à posteriori dans chacune des phases. Dans la première phase, nous assistons bien à une prise de conscience de la nécessité de deux représentations sous l'influence du dispositif. Pour l'illustrer, voici deux prises de parole successives par deux élèves, l'un fait référence au traitement manuel "on va prendre" et présente un choix naïf des variables, dans un schéma itératif. Le second élève fait lui référence au dispositif ("il") et à ses capacités et identifie la nécessité de variables pour les chiffres.

> **E1. On va prendre** A en nombre initial, **on va prendre** B arrangé en ordre décroissant, C en ordre croissant, **on va faire** la différence de, euh, C moins B. O**n va le remettre** dans A, et **on va refaire** avec B et C.
>
> **E2.** Ben si A c'est une variable où c'est un nombre, pour qu'**il** puisse le ranger dans l'ordre croissant et décroissant, faut d'abord séparer les chiffres des dizaines, des unités et des centaines. Donc il faut trois variables….

Comme prévu aussi les élèves dans une phase collective identifient les étapes et par groupe sur ordinateur conçoivent les sous-algorithmes. Les solutions sont variées, et là aussi on constate à nouveau que le dispositif joue un grand rôle dans la réflexion des élèves. Dans la dernière phase, on rencontre la difficulté attendue à assembler les sous-algorithmes avec des variables cohérentes entre les sous-algorithmes, mais aussi en entrée et en sortie du corps de boucle (figure 1). Certains élèves ont construit des solutions pour plusieurs sous-algorithmes à la seconde phase et rencontrent moins de difficulté à les assembler, ce qui indique que la modularité, c'est-à-dire la capacité à considérer un traitement par une spécification abstraite plutôt que par sa réalisation, ne va pas soi.

L'apport de la théorie des situations didactiques

L'ingénierie proposée par Nguyen a certes ses limites puisque l'itération se limite à la répétition et reste liée au contexte de la tabulation de fonctions. Néanmoins, elle met bien en valeur l'idée de variable itérative, comme mémoire (physique) d'une machine mais aussi comme signifiant dans l'écriture d'un traitement. Les élèves sont face à une tâche qui a joué un rôle dans le développement de l'informatique et ils doivent construire des éléments clés d'une machine informatique et du langage de commande permettant d'y répondre de façon efficace. Nous avons observé dans l'option informatique que l'itération est présentée aux élèves par monstration. Le professeur montre un programme et explique comment il fonctionne, avant de proposer des tâches similaires. Il n'est pas étonnant que, sans construction, de nombreux élèves soient en difficulté. Un point crucial est celui des relations entre les opérations d'initialisation et celles constituant le corps de boucle. Selon Samurçay (1985, p. 148) les relations entre ces deux éléments de l'itération sont particulièrement complexes et même après une première initiation, cette complexité entraîne des confusions persistantes chez les débutants. Un des points forts de l'ingénierie, lié à la construction par les élèves d'une structure en réponse à un problème, est qu'ils distinguent bien les opérations d'initialisation de celles constituant le corps de boucle (voir Nguyen, 2005, notamment p. 225).

Tout comme l'ingénierie de Nguyen, la situation de l'algorithme de Kapreka montre les bénéfices d'une approche "théorie des situations didactiques". Les élèves ont progressé seuls sur les points critiques : prise de conscience de le nécessité de sous-algorithmes de conversion, conception et assemblage des sous-algorithmes, et plus généralement la nécessité de penser un plan, non en fonction d'un traitement manuel, mais pour l'expression dans un langage informatique. Comme nous l'avons indiqué plus haut (note 1), une quatrième phase visant à l'étude de la terminaison de l'algorithme a été mise en place dans le cadre d'un travail de thèse. L'analyse de cette phase par Laval (2015) montre que ce travail en a-didacticité sur l'algorithme donne aux élèves une conception des objets en jeu adéquate pour cette phase centrée sur la preuve. Une approche "théorie des situations didactiques" n'apporte pas seulement un milieu offrant une interaction efficace. La conception même du milieu conduit à penser les savoirs en jeu en fonction de cette interaction. Pour l'itération, il faut répondre à des questions telles que : Quels problèmes font ressentir la nécessité d'une structure itérative ? Quelles étapes sont à franchir ? Comment le langage évolue-t-il avec ces étapes ? Les savoirs liés à la notion de variable informatique évoluent ainsi parallèlement à l'évolution des capacités de la machine. Le milieu pour la planification comprend quant à lui un objet sous deux représentations. Les savoirs sous-jacents sont la capacité à concevoir ces deux représentations, à déterminer des variables adéquates pour cela et à assurer une gestion cohérente de ces variables dans l'assemblage de sous-algorithmes dans un corps de boucle.

LES ACQUIS DE LA RECHERCHE EN PSYCHOLOGIE DE LA PROGRAMMATION ET EN DIDACTIQUE DE L'INFORMATIQUE

Comme nous l'avons dit en introduction, l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation est revenu dans les programmes sans référence à l'expérience acquise antérieurement, en particulier à propos de l'option informatique des lycées (en gros, une décennie entre 1981 et 1992), et sans exploitation du questionnement déjà ouvert alors sur les apports potentiels de l'enseignement de l'informatique pour l'apprentissage mathématique (essentiellement au niveau du lycée). Les collègues moins anciens que nous ignorent sans doute les recherches qui se sont parallèlement développées en didactique de l'informatique et en psychologie de la programmation (en particulier à propos des débuts dans le domaine). Ce sont ces acquis sur lesquels cette partie veut attirer l'attention, en faisant un point rapide sur les mouvements qui ont eu lieu dans ce domaine, en soulignant un certain nombre d'acquis stables sur l'activité de programmation et sur les concepts et obstacles épistémologiques et en relevant l'existence de deux questions récurrentes : celle des précurseurs potentiels de la programmation et celle des impacts mutuels entre informatique et mathématique.

L'évolution du domaine

L'évolution du domaine a été présentée en détail lors du Congrès de 2013 de didactique de l'informatique (Rogalski, 2015). Nous en donnons ici un bref résumé. Dans les années 1970, des théoriciens de l'informatique ont recherché des concepts puissants de programmation. Ensuite est venue une "seconde génération", celle d'études expérimentales d'informaticiens largement tournées vers les propriétés souhaitables des langages informatiques. La décennie des années 1980 a vu le déploiement des études en psychologie de la programmation (particulièrement – mais pas seulement - des débutants) et l'émergence d'une didactique de l'informatique (sous ce nom-là dans la communauté francophone européenne) pour une "alphabétisation" scolaire dans ce champ. On observe ensuite, dans une "troisième génération" un "rétrécissement" des recherches sur l'informatique scolaire avec en contrepoint une ouverture des recherches de psychologie de la programmation vers les initiations du niveau universitaire ou professionnel. En conséquence l'intérêt s'est porté vers les langages "orientés objets" (LOO) alors que les langages "procéduraux" dominaient dans les recherches sur le secondaire. Il faut cependant relever une continuité de recherches en psychologie de la programmation via le groupe "The Psychology of Programming Interest Group" (PPIG) constitué à Cambridge (UK) en 1987 pour réunir des acteurs de diverses communautés pour explorer des intérêts partagés dans les aspects psychologiques de la programmation et dans les aspects "computationnels" de la psychologie.

La quatrième génération (après les années 2000) s'est orientée vers une didactique pour l'informatique universitaire et professionnelle – au sens où les questions traitées sont d'une part celles des premiers enseignements universitaires, et d'autre part, celles des acquisitions de concepts avancés, en relation en particulier avec le développement de la programmation "parallèle". Deux ordres de raisons semblent à l'origine de ces nouvelles recherches, essentiellement conduites par les informaticiens enseignant à des niveaux post-secondaire : le manque menaçant d'informaticiens dans les pays occidentaux et le besoin d'avoir des professionnels du niveau exigé pour la sécurité et la fiabilité des programmes à concevoir dans nombre de domaines sensibles (dont ceux touchant les bases de données), alors que les étudiants se dirigent moins vers les études scientifiques en général et l'informatique en particulier. Une triple contrainte semble apparaître : il faut attirer des étudiants en initiation à l'informatique, les garder pour la poursuite d'études dans ce champ – ce qui suppose qu'ils réussissent "suffisamment", et les préparer à être des informaticiens répondant aux attentes de la qualité de la programmation – ce qui suppose qu'ils atteignent un niveau "suffisant" dans leurs acquisitions. Le retour de l'informatique dans la scolarité du secondaire apparaît un moyen de préparer un "vivier" d'étudiants qui permette de répondre à ces contraintes, comme l'exprime l'introduction d'un papier récent :

> While needs of high school students in the US are being prioritized through courses such as Exploring Computer Science (ECS) (…), there is a growing belief that experiences with computing must start at an earlier age. (Grover, Pea & Cooper, 2016).

Le questionnement proprement didactique (élaboration et conduite de situations appropriées aux acquisitions visées, pour dire vite) est toutefois resté limité par rapport à celui orienté vers ces acquisitions, y compris en France. Un article (da Rosa, 2015), d'orientation piagétienne et se référant à la Théorie des Situations Didactiques, regrette d'ailleurs lors du dernier congrès de PPIG que cette dimension "didactique" reste marginale dans les recherches au niveau international. Pourtant, comme l'illustrent les exemples développés dans la première partie de cet article, non seulement on observe une persistance des questions pertinentes soulevée par la seconde génération de recherches, mais on relève aussi la validité des résultats de la recherche des années 1980, dont nous allons rappeler les grandes lignes.

Les acteurs

Il convient de citer quelques acteurs qui ont marqué ce domaine dans la seconde génération en France et dont les travaux ont été repris comme références dans la dernière … lorsqu'ils étaient publiés en anglais. Pour la didactique, je citerai particulièrement André Rouchier et Renan Samurçay. Le texte de Rouchier : "Objets de savoir de nature informatique dans l'enseignement secondaire" situe l'informatique dans un champ d'interrogation didactique, puis analyse les objets informatiques en jeu dans l'écriture de programmes élémentaires, objets d'un domaine de savoir qui peut constituer un "habitat" nouveau pour des savoirs mathématiques (Rouchier, 1990). On peut le reprendre comme un manifeste didactique toujours d'actualité. Il s'appuie sur un ensemble de recherches, dont la plus emblématique en didactique a été conduite avec Renan Samurçay avec une approche de la structure récursive comme réponse à un certain type de problèmes (Samurçay & Rouchier, 1990). La disparition d'un enseignement de la programmation au niveau scolaire n'a pas permis à ce travail conceptuel de didactique d'avoir l'impact qu'il aurait mérité.

En revanche, des acquis sur la psychologie de l'activité de programmation portant sur les concepts informatiques et les activités cognitives en jeu dans la programmation et concernant tout programmeur débutant (et pas seulement les élèves en contexte scolaire) sont restés "vivants". Leur caractère conceptuel - non centré sur la dimension "langage" de la programmation - a certainement joué, et bien sûr le caractère international de leur langue de publication. Il en est ainsi de la recherche de Renan Samurçay sur le concept de variable informatique sur lequel on revient plus loin (Samurçay, 1985/1989), dont la version anglophone est une référence toujours citée (comme l'ouvrage édité par Soloway et Spohrer dans lequel elle est publiée). Un autre acteur de l'organisation de recherches sur la programmation, Jean-Michel Hoc, a également contribué à la production d'un ouvrage de synthèse "Psychology of programming" mis en ligne pour les étudiants en informatique de Cambridge comme référence sur la dimension humaine de la programmation (Hoc, Green, Samurçay & Gilmore, 1990).

Les acquis sur l'acquisition des concepts et l'activité de programmation

Après les acteurs, faisons un point sur les acquis des recherches de la décennie 1980. Ces acquis sont de nature épistémologique et cognitive. Ils sont relatifs aux spécificités de la discipline : l'informatique est à la fois science et pratique (on parle de génie informatique, comme on parle par exemple de génie civil pour l'ingénierie du bâtiment), et à ce titre elle pose un double problème de transposition dans l'enseignement ; l'activité cognitive de programmation présente des spécificités ; des concepts-clés ont des précurseurs qui peuvent jouer un rôle producteur et un rôle réducteur ou sont sans précurseurs ; des connaissances opérationnelles particulières sont en jeu pour la programmation, en particulier des méthodes.

Ces spécificités ont des implications didactiques. Tout d'abord, le double problème de transposition de la pratique de la programmation et du savoir informatique comme savoir scientifique se manifeste dans la conception de situations didactiques. On peut le caractériser par la question suivante : comment articuler l'élaboration de situations didactiques centrées sur l'acquisition de concepts déterminés (variables, boucles, conditionnelles) - dans des problèmes bien circonscrits comme dans les exemples des première et deuxième parties, donc "jouets" - avec une activité de programmation partant - comme la programmation professionnelle - de problèmes consistants, ouverts et suffisamment "attrayants" pour les élèves, dans des situations de "projet" ? Concernant ces situations de "projet", le constat général des études récentes comme de celles conduites autrefois - en particulier avec LOGO - est le fait que l'action didactique de l'enseignant est cruciale pour que l'engagement des élèves ou étudiants se traduise par l'acquisition de concepts de programmation. La nature de cette action enseignante reste à notre point de vue une question didactique ouverte.

En second lieu, l'analyse des spécificités de l'activité de programmation informatique a conduit à souligner plusieurs points :

- en programmation il s'agit de passer de "faire" à "faire faire" (Samurçay & Rouchier, 1985) : l'exécution est déléguée à une "machine", avec perte de contrôle de celui qui a conçu le programme ; cela implique de se constituer une représentation opérationnelle de la machine ou plus précisément du "dispositif informatique" (Rogalski, 1988 ; Rogalski & Hé, 1989) ou de la *notional machine* (Du Boulay, 1986).
- il faut effectuer un changement de niveau entre réalisation d'une occurrence particulière d'une procédure et élaboration d'une procédure générique : cela suppose de passer d'une connaissance "en acte" à une analyse des objets et des actions en jeu ; il s'agit aussi de se questionner sur les entrées qui peuvent être pertinentes, sur la validité de la procédure selon le domaine sur lequel elle va "tourner" ;
- l'analyse des objets et des actions possibles dans le dispositif informatique appelle des acquisitions sur le "système de représentation et de traitement" des données informatiques (SRTI), dont Lagrange (1991) a montré combien c'était un processus difficile, en particulier pour les booléens, en jeu dans les conditionnelles comme dans les boucles et la récursivité;
- il y a besoin d'un contrôle logique des conditionnelles et des itérations - et non plus du contrôle sémantique, qui est d'ailleurs souvent présupposé et non explicité dans les exécutions "à la main". Ainsi, dans une conditionnelle, le dispositif informatique est censé "comprendre" que lorsque le traitement d'une condition A (si A alors faire) est terminée la suite du programme concerne la condition non A (sinon ...), et que lorsque les deux cas ont été traités on passe à la suite de la procédure (en sortant de la conditionnelle) (Rogalski & Hé, 1989) ;
- dans la conception d'un programme interactif destiné à un utilisateur (peut-être le concepteur lui-même, mais plus tard), la représentation du triplet < "je conçois", " un dispositif informatique exécute", "un humain utilise"> appelle une articulation de la procédure "noyau" du programme avec des opérations d'entrée de données (une lecture pour le dispositif...) et de sortie que va lire l'utilisateur (un affichage pour le dispositif), opérations dont la formulation ne va pas de soi lors de l'alphabétisation .

En troisième lieu, des difficultés, voire des obstacles, se présentent régulièrement dans l'acquisition des deux grands concepts clés lors de l'enseignement des bases de la programmation (ce qu'on a appelé l'alphabétisation) : (1) la variable informatique, qui est ...

une fonction (de l'exécution), avec des rôles différenciables dans le programme, nous y revenons (2) la notion d'invariant de boucle (au cœur des écritures récursives), une clé pour la validité des programmes : elle est difficile à dégager - même en acte - pour l'écriture de boucles, avec la nécessité de mettre en relation la valeur des données dans l'entrée dans la boucle, l'exécution du corps de boucle et la valeur des données à la sortie de la boucle. Le contrôle de la fin de l'itération ou de la procédure récursive est une difficulté particulière pour les débutants (voire au-delà ...) Dans l'étude récente citée plus haut d'un enseignement des bases de la programmation au niveau collège ("middle school" US) les auteurs soulignent :

> Serial execution was the easiest to learn, as expected. Between conditionals and loops, learners found loops harder to tackle. Most of the assessment questions concerning loops required manipulation of variables as well, which seemed to be the hardest topic for students to grasp. [...] Both these aspects have been known to be particularly difficult for novice programmers (…) Despite our conscious efforts, students struggled with these topics. (Grover, Pea & Cooper, 2016).

Ces constantes ont été relevées dans des introductions faites le plus souvent dans une approche algorithmique, utilisant des rédactions en "pseudo-code". D'autres difficultés/obstacles spécifiques ont été relevés pour la programmation en langage orienté objet (LOO), dont les relations entre classes et les processus d'héritage. Mais l'écriture des "méthodes" des objets fait rencontrer aux élèves les mêmes notions clés de variables, conditionnelles et boucles. Il faut souligner l'existence de multiples interactions, d'une part entre les concepts informatiques eux-mêmes, et d'autre part entre les concepts et les activités cognitives. Ainsi, une des difficultés de la conception de programmes utilisant la récursivité est la nécessité de faire des "raisonnements sous hypothèse" , dont le schéma est alors le suivant lors de l'écriture d'un module récursif ou itératif (pour simplifier, récursivité sur n entier) : "je suppose que j'ai traité mon problème jusqu'à n, le problème actuel est de trouver comment passer de n à n+1 [c'est justement l'invariant de boucle], puis de chercher quelle valeur de n me permet d'initialiser le processus". Le mode spontané des élèves (pas seulement du secondaire) est de partir de n=1, de chercher à passer à 2, et de coder une forme de "etc.". Nous renvoyons à Samurçay et Rouchier (1990) pour une approche didactique de la récursivité lors de l'alphabétisation informatique. Les structures itératives comme récursives illustrent bien le fait que la variable informatique est une fonction de l'exécution. Ce n'est pas sa seule complexité conceptuelle.

La variable est un concept difficile

Nous avons vu que la variable informatique est une fonction, au sens où sa valeur dépend du moment de l'exécution du programme (évidemment, cette fonction peut être constante, si la variable ne change pas de valeur au cours de l'exécution). Ceci la différencie de la variable mathématique qui peut cependant servir de précurseur : elle a un rôle producteur, via la manipulation formelle de représentations algébriques, mais aussi un rôle réducteur, par son caractère de permanence au cours d'un traitement (dans la résolution de l'équation ax+b=c, x est toujours "le même" et cette invariance est encore plus importante pour résoudre un système d'équations). L'appropriation de la notion de fonction (en mathématique) peut limiter ce rôle réducteur, ce qui pourrait d'ailleurs contribuer à expliquer l'impact du niveau mathématique des élèves sur leurs acquisitions en informatique.[2]

[2] L'importance de la notion de variable en programmation informatique a conduit des chercheurs à élaborer un test sur l'interprétation de relations impliquant l'affectation à des étudiants allant entrer dans leur premier cours d'informatique et ignorant de la programmation. Une méta-analyse des résultats (Dehnadi, Bornat & Adams, 2009) a montré qu'une bonne cohérence dans l'interprétation de l'opération d'affectation (avant toute introduction à un langage informatique) présageait de meilleur succès dans le début de l'apprentissage de la programmation (mais que leur épreuve ne pouvait pas servir valablement de test de sélection). On pourrait faire l'hypothèse ce qui est en

D'autre part, le champ conceptuel de la variable informatique fait intervenir les notions de type de variable, la représentation dans une donnée structurée, et l'existence d'un ensemble d'opérations sur la variable. Il comporte aussi des rôles fonctionnels de la variable dans le programme. Enfin, dans la mesure où un programme suppose une modélisation du problème en termes informatiques, les relations des variables utilisées avec les composants du problème sont plus ou moins délicates (cf. les exemples traités dans les deux premières parties). Une analyse de ce champ conceptuel a été développée pour l'alphabétisation par Samurçay (1985/1989) et pour la programmation dans l'enseignement supérieur Sajaniemi (2008) et Sorva (2008), qui font référence à Samurçay (1989). Samurçay a distingué 4 rôles de la variable, lors de l'alphabétisation (entre parenthèses les termes retenus par Sajaniemi) : (1) donnée (fixed value), (2) compteur (stepper) (3) accumulateur (gatherer) (4) intermédiaire pour la programmation (temporary). Pour la programmation plus avancée, Sajaniemi a enrichi cet herbier de rôles, en identifiant 6 autres rôles, qui avec les précédents couvrent plus de 99% des rôles rencontrés dans l'enseignement de la programmation, qu'elle soit procédurale ou orientée-objet. Certains de ces rôles s'actualisent dans le traitement de données comme des listes, des arbres, des tableaux. Les propriétés des variables et de leur traitement qui présentent des accès plus ou moins délicats pour les élèves sont leur statut dans la modélisation : une variable qui a un rôle d'intermédiaire présentant du sens dans le problème (externalité de la variable) est plus accessible cognitivement que celle nécessitée par l'existence du dispositif informatique (internalité de la variable) ; un compteur qui reflète les étapes d'un traitement "à la main" est plus aisé à représenter et utiliser, de même qu'un accumulateur. L'impact des rôles interfère avec les types de données et les opérations en jeu (en particulier l'initialisation et le test - par sa nature, la structure de donnée retenue, sa place dans une boucle ...). Au-delà de l'alphabétisation, Sorva (2008) a souligné par ailleurs que :

> The behavior of a variable, that is the logic that dictates how the variable is used, is often defined at multiple distinct locations in program code [...], may be described by inconsecutive lines of code within a function or a method, located in a number of functions or even located in several program modules (p. 64).

Il a également montré que si on explicite aux étudiants les rôles des variables dans les programmes, ils font davantage de progrès en programmation.

Difficultés relatives des activités cognitives portant sur le champ conceptuel de la variable informatique

Parmi les activités cognitives spécifiques à la programmation informatique, qui posent problème au débutant, se pose la constitution d'une représentation des différentes opérations que l'on peut effectuer sur les composants du programme, en particulier les variables auxquelles on s'intéresse ici. La déclaration de variable (pas toujours imposée par le langage) peut contribuer positivement à la construction d'une représentation du système de représentation du langage (à un niveau "logique") elle peut contraindre aussi à rencontrer des types de variable non familiers à l'élève. Nous avons montré en première partie le saut cognitif que constitue l'utilisation de booléens - et de leur combinatoire – pour exprimer des conditions.

Les registres de représentation utilisés en mathématiques peuvent ne pas suffire à traiter informatiquement un problème, dès lors que celui-ci fait intervenir d'autres registres dont le sujet n'est pas conscient parce qu'il les a "naturalisés". Il en est ainsi dans la lecture d'un nombre entier à la fois comme suite de ses chiffres et comme nombre objet potentiel des "quatre opérations". L'exemple de l'algorithme de Kaprekar développé en seconde partie illustre cette

jeu n'est pas tant le concept de variable (que les étudiants construiront plus ou moins bien au cours de leur alphabétisation informatique) que la manipulation d'un registre symbolique arbitraire.

problématique - en même temps qu'il constitue une situation didactique appropriée pour donner du sens à la notion de type de variable (qu'on utilise ou non ce terme). Rôle et déclaration sont des éléments indépendants dans le champ conceptuel de la variable ("declaring a variable, if it is explicitly done in the language at all, is a matter separate from the variable's behavior" - Sorva, 2008). Le contrôle des valeurs dans le programme suppose de s'affranchir des présuppositions des traitements à la main. On peut voir dans les exemples d'écriture du programme de résolution de l'équation du premier degré ax+b=c, l'absence de prise en compte du cas a=0 : le contrat didactique courant appelle à éventuellement préciser a≠0 dans l'expression du calcul x=(c-b)/a, sans que le statut du cas a=0 soit pour autant repéré: la présupposition sous-jacente est que si on parle de résoudre l'équation du premier degré c'est que la variable x apparaît effectivement dans l'expression, ce qui n'est pas le cas si a=0.

De manière générale, les opérations sur les variables - initialisation, mise à jour, test - peuvent constituer en elles-mêmes des ruptures avec la pratique habituelle des élèves, même avec l'écriture d'un algorithme "papier-crayon", encore plus dans l'exécution d'un algorithme, lors de laquelle l'élève sait bien quelle est la valeur de la variable qu'il traite... L'organisation séquentielle des opérations sur les variables peut aussi être en rupture avec les traitements "à la main" - ce qu'on a observé dans la difficulté plus grande à utiliser des boucles conditionnelles plutôt que des itérations en nombre déterminé (pas de test explicite), la difficulté plus grande à maîtriser les boucles de forme "tant que" (où on teste une variable avant tout traitement) par rapport aux boucles de forme "jusqu'à" (le test sur la variable est un test d'arrêt en position finale dans la boucle). Le contrôle des valeurs prises par une variable au cours de l'exécution d'un programme est une activité cognitive qui n'est pas non plus dans la continuité des opérations "à la main" ; ici le traitement logique des variables dans le programme interagit avec les représentations de l'exécution du programme. En fait, une propriété fondamentale sous-jacente à nombre de ces difficultés cognitives de représentation et de traitement de la variable informatique est que celle-ci est ... une fonction. On pourrait la rapprocher de ce qui est rencontré plus tard par les élèves (dans le secondaire, en France), à savoir la notion de suite numérique - dont on peut se demander quand elle a pour eux le statut de fonction.

CONCLUSION

Nous avons insisté dans cet article sur les difficultés conceptuelles des élèves, souvent ignorées ou au mieux mal connues des acteurs du terrain ou institutionnels. Nous avons montré qu'elles se rencontrent très généralement chez les débutants dans différents contextes temporels et curriculaires. Considérer ces difficultés ne veut en aucun cas dire qu'un enseignement d'algorithmique ou de la programmation à des débutants serait vain. Nous sommes impliqués dans le domaine depuis plus de trente ans et l'évolution sociale confirme ce que nous pressentions à nos débuts : il est important que les élèves puis les adultes soient conscients de l'activité humaine à l'origine de toute application informatique, et de la rationalité qui préside à cette activité. Le repérage des difficultés nous conduit à penser qu'il est utile que l'initiation commence tôt de façon que les processus de maturation conceptuelle des élèves puissent avoir lieu sur le temps long des études.

La didactique a un rôle très important à jouer. Nous avons montré les nombreux acquis côté "psychologie de la programmation", mais, dans le contexte d'un enseignement scolaire de l'informatique qui serait lié aux mathématiques, le champ des questions ouvertes reste très vaste. Quel est précisément l'étendue des difficultés ? Dans quelle mesure affectent-elles les apprentissages visés ? Quels précurseurs peuvent jouent un rôle producteur en permettant aux élèves qui en disposent de surmonter rapidement ces difficultés, ou un rôle réducteur inverse ? Nous avons souligné aussi la quasi absence de travail proprement didactique : concevoir, conduire et analyser des situations didactiques candidates à des acquisitions des élèves. Ceci renvoie à une époque où les travaux initiaux en didactique des mathématiques et en didactique des sciences étaient centrés soit sur des approches purement épistémologiques, soit sur les "erreurs" ou "misconceptions".

Les convergences entre les mathématiques et l'informatique sont souvent soulignées au plan de l'épistémologie. Mais qu'en est-il au plan des apprentissages ? Des études montrent régulièrement que des élèves qui réussissent en maths ont une meilleure entrée dans la programmation - mais il s'agit d'évaluations assez globales, qui ne font pas directement apparaître ce qui pourrait être sous-jacent. Y-a-t-il réellement dans les connaissances mathématiques des précurseurs producteurs en programmation ? Ou s'agit-il d'une corrélation dont des précurseurs communs, comme par exemple de bonnes représentations de l'espace, ou une bonne manipulation des opérations de raisonnement, rendraient compte ? Algorithmes ou programmes fournissent un registre de représentation supplémentaire pour de nombreuses entités mathématiques –figures, formules, fonctions… Quelles activités de programmation permettent effectivement à ces registres (Duval, 1995), ainsi que les traitements et conversions qui leur sont attachés, de devenir disponibles chez les élèves, et conduiraient ainsi à des effets en retour de l'apprentissage de la programmation sur les acquis en mathématiques ?

La didactique des mathématiques a aujourd'hui des outils multiples, théoriques et méthodologiques, pour aborder les questions que nous venons de soulever. Les exemples de la seconde partie montrent l'intérêt d'une approche dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, encore peu utilisée dans le secondaire il y a 25 ans. Cette approche conduit à concevoir un milieu offrant à l'élève une interaction efficace et oblige à penser les savoirs en jeu non seulement au plan épistémologique ou cognitif mais aussi au plan proprement didactique. Les travaux sur la dimension sémiotique dans l'activité mathématique, parmi lesquelles la notion de registre de représentation que nous venons de mentionner tient une place importante, pourraient apporter leur contribution dans un domaine où les écritures symboliques tiennent une grande place. Au-delà des situations "simplifiées" visant spécifiquement à faire affronter des concepts clés de la programmation, les travaux sur la modélisation pourraient contribuer à l'étude de situations de "projets" visant à transposer la pratique informatique. Un champ de recherche très large est ouvert. Nous espérons que cet article sera utile pour cela.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARON, G.-L. (1989) *L'informatique discipline scolaire*. Paris : PUF.

BRIANT, N. (2013) *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc.

BROUSSEAU, G. (1988) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CRAHAY, M. (1987) Logo, un environnement propice à la pensée procédurale ? *Revue française de pédagogie*, 80(1), 37-56.

DA ROSA, S. (2015) The construction of knowledge of basic algorithms and data structures by novice learners. In M. Coles & G. Ollis (Eds.), *Proceedings of the Psychology of Programming Interest Group Annual Conference 2015* (pp. 37-47). http://ppig.org/sites/default/files/2015-PPIG-26th-proceedings.pdf (consulté 17/2/2016).

DEHNADI, S., BORNAT, R., & ADAMS, R. (2009) Meta-analysis of the effect of consistency on success in early learning of programming. Proceedings of the 21th PPIG Conference.

DU BOULAY, B. (1986) Some difficulties of learning to program. *Journal of Educational Computing Research*, 2(1), 57-73.

DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang.

ENGEL, A. (1979) *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique* : (adapté par Daniel Reisz), Paris : CEDIC.

GROVER, S., PEA, R.D., & COOPER, S. (2016) Factors influencing computer science learning in middle school. *SIGCSE '16*, March 02-05, Memphis, TN.

GUY, M.-N. (2013) *Utilisation du cadre théorique de la planification pour la conception d'algorithmes complexes par des élèves de lycée*. Mémoire de master de Didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.

HOC, J. M., GREEN, T. R. G., SAMURCAY, R., J. GILMORE D. J. (Eds) (1990) *Psychology of programming*. London: Academic Press.

LAGRANGE, J.-B. (2002) Les outils informatiques entre "sciences mathématiques" et enseignement. Une difficile transposition ? In Guin D. & Trouche L. (eds) (2002). *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail* mathématique (pp. 89-116). Grenoble : La Pensée Sauvage.

LAGRANGE, J.-B., & GUY, M.-N. (2015) Planification et connaissances mathématiques dans une situation d'apprentissage au lycée : l'algorithme de Kaprekar. *Petit x*. 97, 45-70.

LAGRANGE, J-B. (1991) *Des situations connues aux traitements sur des données codifiées : représentations mentales et processus d'acquisition dans les premiers apprentissages en informatique*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

LAVAL, D. (2015) L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international Espace de Travail Mathématique*, pp. 103-116. Madrid : I.M.I.

NGUYEN, C. T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*. Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

NGUYEN, C. T., BESSOT, A (2010) Introduire des éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire ? Une ingénierie didactique. *Petit x*. 83. 27-49

PAPERT, S. (1981) *Jaillissement de l'esprit, ordinateurs et apprentissages* (texte français de R.M. Vassallo-Villaneau). Paris : Flammarion,

ROGALSKI, J. (1988) Les représentations mentales du dispositif informatique dans l'alphabétisation. In C. Laborde (Ed.), *Actes du 1er colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 237-245). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROGALSKI, J. (2015) Psychologie de la programmation, didactique de l'informatique : déjà une histoire… In G.-L. Baron, E. Bruillard, E., & B. Drot-Delange (Éds.), *L'information en éducation : perspectives curriculaires et didactiques* (pp. 279-305). Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.

ROGALSKI, J., & HE, Y. (1989) Logic abilities and mental representations of the informatical device in acquisition of conditional structures by 15-16 year-old students. *European Journal of Psychology of Education*, 4(1), 71-82.

ROGALSKI, M., SAMURÇAY, R. (1990) Acquisition of programming knowledge and skills. In J. M. Hoc, T. R. G. Green, R. Samurcay, D. J. Gilmore (Eds) *Psychology of programming* (pp. 157-173). London: Academic Press.

ROUCHIER, A. (1990) Objets de savoir de nature informatique dans l'enseignement secondaire. *ASTER, 11, Informatique, regards didactiques*, 29-44.

RUTHVEN, K. (1996) Calculators in the mathematics curriculum: The scope of personal computational technology. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) International Handbook of Mathematics Education (pp. 435-468). Dordrecht: Kluwer.

SAJANIEMI, J. (Ed.) (2008) Special issue on Psychology of Programming. *Human Technology*, 4(1).

SAMURÇAY, R. (1985) Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 143-161.

SAMURÇAY, R. (1989) The concept of variable in programming: its meaning and use in problem-solving by novice programmers. In E. Soloway & Spohrer, (Eds.), *Studying the novice programmer*. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

SAMURÇAY, R. (1989) The concept of variable in programming : Its meaning and use in problem solving by novice programmers. In E. Soloway & J.-C. Spoher (Eds.), *Studying the novice programmer* (pp. 161-178). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

SAMURÇAY, R., & ROUCHIER, A. (1990) Apprentissage de l'écriture et de l'interprétation des procédures récursives. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 287-327.

SORVA, J. (2008) A Roles-Based Approach to Variable-Oriented Programming. Human Technology, Volume 4 (1), pp. 62-74.

TALL, D.O., & THOMAS, M.O.J. (1986) The value of the computer in learning algebra concepts. *Proceedings of the 10th Conference of PME* (pp. 313-318). London : University of London Institute of Education.

UNE CARACTERISATION DES PRATIQUES DE PROFESSEURS DES ECOLES LORS DE SEANCES DE MATHEMATIQUES DEDIEES A DES PROBLEMES OUVERTS AU CYCLE 3

Christine **CHOQUET-PINEAU**

CREN, Université de Nantes

christine.choquet@univ-nantes.fr

Résumé

Ce texte reprend les principaux éléments développés dans notre thèse (Choquet, 2014). Nous présentons une analyse des pratiques de cinq professeurs des écoles lorsqu'ils étudient des problèmes ouverts, avec leurs élèves de cycle 3, pendant les cours de mathématiques. Les pratiques sont ordinaires au sens où nous ne sommes intervenus ni dans le choix des problèmes, ni dans la mise en œuvre des séances. Dans ce travail, nous cherchons à comprendre les motivations des enseignants quant à l'étude de ces problèmes en classe, la mise en œuvre des séances et à repérer les savoirs en jeu. Pour cela, nous avons observé les cinq professeurs sur une année scolaire et placé cette recherche dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert, Rogalski, 2002) tout en utilisant les notions de gestes et routines professionnels (Butlen, 2004).

Ce travail s'articule autour de trois pôles. Dans le premier, utilisant des éléments du cadre de l'approche documentaire du didactique (Gueudet, Trouche, 2008), nous proposons des explications des choix effectués par les enseignants en termes de ressources utilisées. Le deuxième pôle s'articule autour d'une analyse *a priori* des énoncés choisis où nous étudions notamment les raisonnements envisageables pour les élèves et la nature de la solution attendue, cela afin de déterminer le parcours mathématique proposé aux élèves de chacune des cinq classes. Le troisième pôle est constitué d'une analyse *a posteriori* des séances observées. Celle-ci permet d'abord de montrer que la pratique de chacun des enseignants est stable (Robert, 2005) lors de l'étude en classe de problèmes ouverts. Puis, en repérant les gestes et routines professionnels de chaque professeur, nous établissons une caractérisation de leurs pratiques et dégageons deux profils d'enseignants associés à l'étude de ces problèmes en classe.

Mots clés

Pratiques enseignantes, mathématiques, problèmes ouverts, cycle 3, double approche didactique et ergonomique, profils d'enseignants.

Remerciements

L'auteur tient à remercier M. Hersant et D. Butlen pour l'avoir accompagnée tout au long de son travail de thèse.

L'enjeu principal de ce texte est la présentation de l'étude des pratiques ordinaires de cinq professeurs des écoles du cycle 3 lorsqu'ils proposent en classe d'étudier des problèmes ouverts (Arsac & Mante, 2007). La recherche et les résultats présentés ici sont issus de notre travail de thèse intitulée « une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à des problèmes ouverts au cycle 3 » (Choquet, 2014).

Dans une première partie, nous revenons sur les origines de ce travail et sur les travaux de recherche déjà réalisés dans le domaine. La deuxième partie a pour objet de présenter la problématique de recherche et le cadrage théorique choisi. La troisième partie revient sur la constitution du corpus d'étude et son analyse. Dans la quatrième partie, nous énonçons les trois principaux résultats obtenus et présentons nos perspectives de travail.

ORIGINES DE LA RECHERCHE ET TRAVAUX DEJA REALISES

Cette étude trouve son origine dans un flou constaté dans les instructions officielles pour l'école élémentaire de l'année 2008 : les professeurs des écoles sont invités à enseigner les mathématiques par résolution de problèmes, à développer en particulier chez tous les élèves des capacités de recherche et de raisonnement cependant rien n'est explicitement dit sur les moyens d'y parvenir, sur les problèmes à utiliser et sur les savoirs à enseigner. Par ailleurs, des rapports récents sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 (Durpaire, 2006 ; Kahane, 2003) insistent sur les difficultés des professeurs des écoles à enseigner avec des problèmes de type ouverts. D'autres rapports (MEN-DEEP, 2010 ; PISA, 2002 à 2013) montrent que même si les élèves ont des connaissances en mathématiques, ils rencontrent des difficultés, en fin d'école primaire puis en fin de scolarité à résoudre des problèmes inédits pour eux.

Notre recherche s'inscrit dans le prolongement de travaux déjà réalisés en didactique des mathématiques sur les savoirs visés par l'étude de problèmes ouverts dans les cours de mathématiques de cycle 3 (Douaire, 2006 ; Hersant et Thomas, 2008 ; Hersant, 2010 ; Houdement, 2009) et sur les pratiques de professeurs des écoles utilisant ces problèmes (Douaire et Hubert, 1999 ; Georget, 2009 ; Hersant et Morin, 2013). Ces travaux ont identifié des difficultés, chez les enseignants comme chez les chercheurs, à repérer les savoirs en jeu dans les problèmes ouverts, des difficultés à gérer des situations problèmes ouverts à l'école primaire. Ils ont également mis en évidence une certaine complexité des pratiques associées à l'étude de ces problèmes, ceci dans le cadre d'ingénieries didactiques ainsi que celui de recherches collaboratives.

La revue de littérature ainsi réalisée sur le sujet nous a amenée à nous interroger sur les pratiques ordinaires de professeurs des écoles lorsqu'ils étudient des problèmes ouverts au cycle 3. Il s'agissait pour nous d'étudier les professeurs des écoles utilisant ces problèmes sans intervention du chercheur contrairement aux recherches déjà réalisées mobilisant des ingénieries didactiques (Douaire, 2006) et/ou des recherches collaboratives (Georget, 2009 ; Hersant et Thomas, 2008).

PROBLEMATIQUE ET CADRAGE THEORIQUE

Problématique de la recherche

À travers une étude de cas, notre approche consiste à comprendre ce qui se fait dans les classes ordinaires en termes d'étude de problèmes ouverts. La problématique de recherche s'articule autour de trois groupes de questions : des questions sur les motivations des professeurs des écoles pour étudier en classe de problèmes ouverts, des questions sur les choix qu'ils font pour leur classe dans le cadre de l'étude de ces problèmes et des questions sur les savoirs effectivement en jeu lors des séances qu'ils proposent. Ceci se traduit par le questionnement suivant :

- Quelles sont les motivations des professeurs des écoles qui proposent d'étudier en classe des problèmes ouverts ?
- Quels choix font-ils pour la mise en œuvre de séances dédiées à ces problèmes ?
- Quels objectifs d'apprentissage sont effectivement visés lors de ces séances ?

Cadrage théorique de la recherche

Dans l'objectif de répondre à ces questions, le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) a été choisi. Notre étude s'apparente en cela à des recherches menées depuis les années quatre-vingt-dix sur les pratiques des professeurs de mathématiques en lien avec la formation (Robert, 2001), avec l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième (Roditi, 2001), dans une approche ergonomique (Rogalski, 2000), et sur les pratiques de professeurs des écoles débutants en zone d'éducation prioritaire (Butlen, Peltier-Barbier, Charles-Pézard, Masselot, 2004).

Afin d'affiner nos analyses, nous avons également utilisé des éléments du cadre théorique de l'approche documentaire du didactique (Gueudet, Trouche, 2010), les notions de gestes et routines professionnelles (Butlen, 2004 ; Butlen, Charles-Pézard et Masselot, 2012) et quelques éléments du cadre de la problématisation (Orange, 2002).
Le schéma 1 suivant représente l'apport de chacun des éléments théoriques choisis en vue d'analyser les pratiques enseignantes en tenant compte de toute leur complexité :

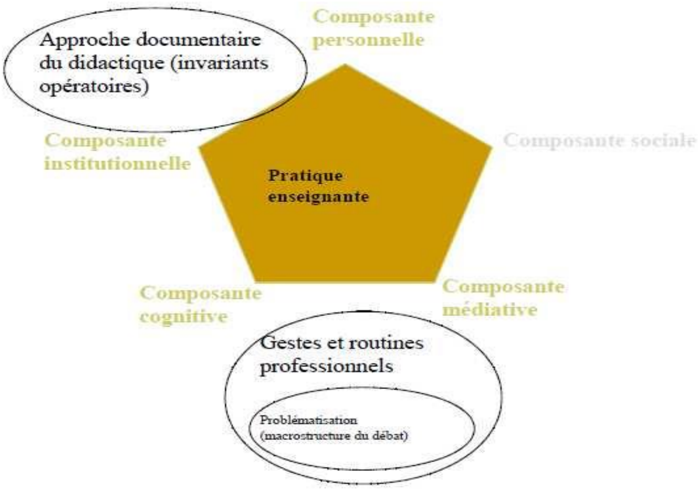


Schéma 1 : Cadrage théorique

Nous avons considéré cinq composantes de la pratique (Robert & Rogalski, 2002) matérialisées par les cinq sommets d'un pentagone : deux des composantes -cognitive et médiative- sont liées aux séances menées par l'enseignant et considèrent le point de vue didactique des pratiques en lien avec les apprentissages potentiels des élèves. Les trois autres -sociale, institutionnelle et personnelle- sont liées à l'exercice du métier d'enseignant et aux contraintes (certaines externes à la classe) qui en découlent. Nous avons fait le choix dans cette étude de regarder des enseignants dont la composante sociale est quasiment la même.

L'introduction des notions de gestes et routines professionnels permet de renseigner la composante médiative.

Les éléments des deux cadres théoriques (l'approche documentaire du didactique et la problématisation) permettent de compléter celui de la double approche et de renseigner respectivement les composantes institutionnelle et médiative.

D'une part, afin de renseigner la composante institutionnelle, étant donné que les problèmes ouverts ne sont pas directement liés à l'étude de savoirs mathématiques curriculaires, que par exemple, ils ne sont pas explicitement proposés dans les manuels scolaires comme peut l'être une notion liée à des savoirs mathématiques clairement définies, l'identification d'invariants opératoires dans le cadre de l'approche documentaire est un apport nécessaire pour analyser l'utilisation de ressources par les enseignants. Ces invariants opératoires sont des connaissances, des représentations de l'enseignant, souvent implicites, qui semblent sous tendre l'utilisation des ressources.

D'autre part, afin de renseigner la composante médiative, l'élaboration de macrostructures du débat (Orange, 2002) en lien avec le cadre de la problématisation nous permet de repérer ou non des débats dans la classe et de préciser la pratique des enseignants notamment lors des phases de mise en commun des résultats en classe. Ces macrostructures du débat permettent en particulier de repérer qui des élèves ou du professeur interviennent, questionnent et contribuent à faire avancer ou non le débat.

METHODOLOGIE DE L'ETUDE

Le choix des professeurs

Nous avons choisi cinq professeurs des écoles parmi une vingtaine ayant répondu positivement à notre demande (E1, E2, E3, E4 et E5). Les cinq enseignants sélectionnés sont non débutants, ils travaillent dans des écoles non socialement défavorisées. Ils ne sont pas spécialistes des mathématiques : deux parmi eux ont obtenu un baccalauréat scientifique et trois un autre baccalauréat, aucun des cinq n'a étudié les mathématiques à l'université. En cela, ils sont relativement représentatifs des professeurs des écoles en France (Artigue, 2011).

La constitution du corpus

Nous avons choisi d'observer les cinq enseignants dans leur classe lorsqu'ils proposent d'étudier des problèmes ouverts. L'observation s'est faite sur un temps long -une année scolaire- et de manière ordinaire c'est-à-dire sans intervention du chercheur dans le choix des problèmes, dans l'organisation ni dans la mise en œuvre des séances.

Le corpus est constitué de l'enregistrement vidéo et de la transcription de 25 séances, de l'enregistrement audio et de la transcription de travaux d'élèves en petits groupes, des travaux écrits des élèves (brouillons, feuilles de recherche, affiches) et de la transcription d'échanges avec les professeurs, avant et après chacune des séances observées.

La méthodologie d'analyse : trois niveaux de granularité

Sur la base de ce corpus, nous avons décidé d'effectuer des analyses selon trois niveaux de granularité définis en nous appuyant sur les niveaux global, local et micro utilisés par Robert (2008a).

Un panorama

Tout d'abord, l’étude des problèmes ouverts dans les classes observées est répartie sur toute l’année scolaire et non sur un temps court, elle constitue un module se déroulant sur l’année entière. La description et la compréhension des pratiques enseignantes nécessitent donc une analyse à l’échelle de l’année scolaire, que nous avons nommé « panorama ». Ce niveau d'analyse inclut celle des ressources disponibles et le repérage des ressources utilisées par les professeurs. Il comprend également l'analyse *a priori* des problèmes choisis par les enseignants afin de déterminer le parcours mathématique proposé aux élèves de chaque classe.

Un premier zoom

Une analyse a ensuite été réalisée au niveau de chacune des séances, ce que nous avons considéré comme un « premier zoom » sur les pratiques des professeurs. Elle consiste en un découpage des séances en différentes phases afin d'effectuer des comparaisons intra-individuelles puis inter-individuelles.

Ces analyses au niveau panoramique et du premier zoom nous ont permis d’identifier les choix que chaque professeur fait pour sa classe.

Un second zoom

Enfin, l'enjeu de notre étude était de dégager des profils d’enseignants utilisant des problèmes ouverts en classe. De ce fait, pour caractériser ces profils, une analyse à un niveau plus fin, au niveau d’un « second zoom », permettait de mettre en évidence des gestes et routines professionnels (Butlen, 2004). Cee second zoom étai effectué sur des moments des séances en lien avec les processus de dévolution, de régulation et d’institutionnalisation.

Représentation des liens entre cadrage théorique et méthodologie d'analyse

Le schéma 2 suivant représente les liens entre le cadrage théorique choisi et la méthodologie de recherche suivant les trois niveaux d'analyse -panorama, premier et second zoom- :

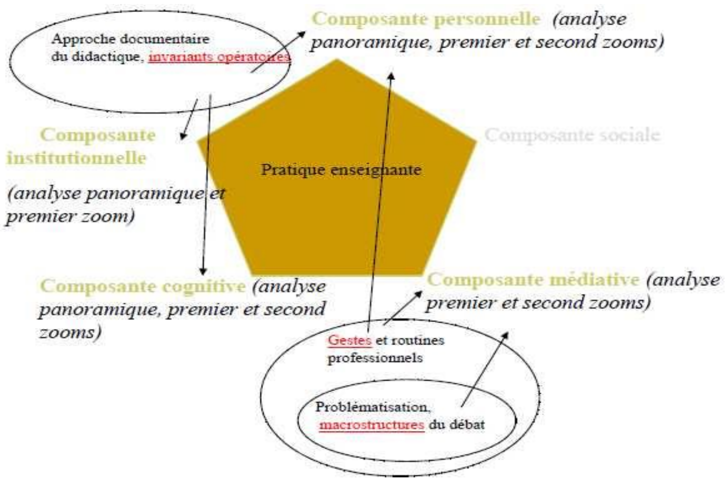


Schéma 2 : cadrage théorique et niveaux d'analyse

En italique sont précisées les composantes de la pratique des enseignants interrogées selon chaque niveau d’analyse. Les flèches montrent ce que chaque élément théorique utilisé apporte à chaque composante. L'identification dans le cadre de l'approche documentaire du didactique d'invariants opératoires permet de renseigner la composante institutionnelle mais également les composantes cognitive et personnelle des pratiques. Le repérage de gestes professionnels ainsi que l'élaboration de macrostructures du débat permettent de renseigner les composantes médiative et personnelle.

RESULTATS DE LA RECHERCHE

Le cadrage théorique exposé précédemment ainsi que la méthodologie de recherche mise en œuvre nous ont permis d'obtenir des résultats de trois types :

- Le repérage d'une stabilité des pratiques des enseignants proposant des problèmes ouverts en classe (stabilité au sens de Robert, 2005).
- La détermination du parcours mathématique proposé aux élèves de chaque classe étudiant ces problèmes et de ce que peut être un problème ouvert pour des professeurs des écoles.
- L'identification de deux profils d'enseignants proposant des problèmes ouverts en classe.

Résultat 1 : la stabilité des pratiques du problème ouvert

De nombreuses recherches montrent que les pratiques de professeurs de mathématiques non débutants sont stables autrement dit « *des décisions analogues sont prises dans des situations analogues* » (Robert, 2005). Dans notre étude, l'objectif des séances n'est pas l'étude de savoirs curriculaires et les enseignants ne sont pas des spécialistes des mathématiques, néanmoins une stabilité est repérable dans leurs pratiques du problème ouvert : dans le choix des ressources et dans l'organisation des séances qu'ils dédient aux problèmes ouverts.

Dans le choix des ressources

Dans un premier temps, en repérant les ressources choisies par les cinq enseignants parmi l'ensemble disponible que nous avons analysé, nous avons constaté que les cinq professeurs des écoles choisissent une autre ressource que le manuel de la classe pour trouver des problèmes ouverts. De plus, nous avons également repéré que le choix d'une ou deux ressources était stable et défini pour l'année scolaire. Le tableau suivant présente les ressources utilisées par les cinq enseignants :

	E1	E2	E3	E4	E5
Cap Maths					
J'apprends les Maths					
Euro maths			CM2		
Ermel		CM1/CM2			
Revue Grand N					
Autres revues prof.					Brochure IREM 6ème
Site ARMT					
Autres sites	Site rallye Puy de Dôme		Site IA21		
Formation initiale/continue				F initiale IUFM	

Tableau 1 : Ressources utilisées par les enseignants

Dans un deuxième temps, à partir de régularités mises en évidence lors de nos observations et des échanges avec les enseignants, nous avons identifié cinq invariants opératoires et envisager une explication des choix qui sont faits. Le tableau ci-après (Cf. Tableau 2) présente la répartition de ces cinq invariants opératoires selon les enseignants. Deux invariants opératoires sont communs aux cinq enseignants. Les enseignants se distinguent par les trois autres invariants : le caractère ludique ou non du problème, la recherche d'une preuve ou la proximité de la classe de sixième.

	IO1 : un problème ouvert amène les élèves à chercher sans l'aide de l'enseignant	IO2 : un énoncé de problème ouvert est différent d'un problème traité habituellement en classe	IO3 : un problème ouvert a un caractère ludique	IO4 : un problème ouvert mène à l'étude de preuves en mathématiques	IO5 : un problème ouvert se rapproche des problèmes proposés en mathématiques en classe de sixième
E1	x	x	x		x
E2	x	x		x	
E3	x	x	x		
E4	x	x	x		
E5	x	x			x

Tableau 2 : Invariants opératoires selon les cinq enseignants

Dans l'organisation des séances dédiées aux problèmes ouverts

La stabilité des pratiques s'exprime également dans l'organisation des séances proposées par les enseignants. Sans entrer ici dans le détail de cette organisation pour chacun des enseignants, nous obtenons que seul un des enseignants, E4, varie quelque peu l'organisation des séances. Autrement dit, lorsque nous entrons dans la salle de l'un des cinq enseignants lorsqu'il propose un problème ouvert, nous sommes quasiment sûrs d'observer le même déroulement : une succession des mêmes phases et une durée pratiquement identique des séances et des différentes phases. Ces phases sont déterminées par le type d'activité demandé aux élèves : phase de démarrage de la séance (consignes ou exercices préparatoires à l'activité de recherche), phase de recherche individuelle, en binôme ou en groupe, phase de mise en commun des résultats et phase de synthèse.

En annexe 1, le lecteur trouvera une répartition des différentes phases lors des séances observées dans la classe de chacun des cinq enseignants. Pour plus de précisions concernant l'analyse de ces diagrammes et les comparaisons intra-individuelles de l'organisation des séances observées, nous renvoyons à notre manuscrit de thèse[54] (Choquet, 2014).

Résultat 2 : le parcours mathématique proposé aux élèves dans chaque classe

Le deuxième résultat issu de notre travail concerne le parcours mathématique sur l'année

[54]Manuscrit disponible à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01185671

scolaire que chaque professeur propose à sa classe c'est à dire les mathématiques qu'ils font fréquenter à leurs élèves pendant ces séances tout au long de l'année scolaire.

Nous présentons ci-après (Cf. Tableau 3) une partie des résultats qui permettent d'établir une caractérisation des problèmes ouverts choisis par les enseignants observés.

La plupart des énoncés choisis sont en lien avec la vie courante, la vie quotidienne des élèves (une pesée, une course d'endurance, un cirque…). Certains domaines mathématiques sont très peu représentés : peu de géométrie, des énoncés en lien avec le domaine numérique sont surtout choisis.

Problèmes choisis	Lien avec la vie courante	Domaines mathématiques				Types de raisonnements attendus						
		Nb. et Calcul	Géom.	Grand. et mesures	Gestion de données	Induction	Impl. logique	Exhaustivité des cas	Par l'absurde	Disjonction de cas	Modélisation	Essais ajustement
E1A Les balances	X	X				X	X					X
E1B Les tonneaux	X	X					X			X	X	X
E1C Zinette	X	X					X					
E1D Les menteurs	X				X		X		X			X
E1E L'horloge	X			X			X					X
E1F La course	X			X			X		X			
E2A Trois nombres …		X				X	X					X
E2B Golf		X				X		X				X
E2C La plaque de voiture	X	X					X	X				X
E2D Chacun sa place	X				X				X		X	X
E3A Le jeu vidéo	X	X				X						X
E3B La monnaie	X			X		X	X					X
E3C La cible olympique	X	X				X						X
E3D L'hémicycle	X	X					X				X	
E3E Les tartelettes	X	X				X		X				X
E3F Les triangles		X	(X)			X		X				
E4A Le plus petit	X				X		X		X			
E4B L'anniversaire	X				X		X		X		X	
E4C La bûche	X				X						X	
E4D Le cirque	X				X		X		X			
E4E La marmite de confit.	X	X					X					
E4F Les cubes		X	(X)				X					
E5A Le chien	X		X				X				X	
E5B La leçon de chimie	X			X			X		X			

Tableau 3 : Parcours mathématiques proposés par enseignant

Certains raisonnements sont privilégiés, d'autres beaucoup moins. Pour résoudre les problèmes choisis, il peut s'agir d'avancer par essais et ajustements, par implication logique, de mobiliser la notion de contre-exemple ou encore de schématiser voire de modéliser la situation. Là encore, pour plus de précisions concernant l'analyse a priori des problèmes choisis par les cinq enseignants et les parcours mathématiques proposés dans chacune des classes, nous renvoyons à notre manuscrit de thèse.

Résultat 3 : l'identification de deux profils de professeurs utilisant des problèmes ouverts en classe

Le troisième résultat obtenu concerne la caractérisation des pratiques des professeurs observés. Nous utilisons pour cela les cinq niveaux des pratiques développés par Butlen, Masselot, Charles-Pézard (2012). La caractérisation des pratiques selon cinq niveaux concerne, dans le cadre de leurs recherches, l'enseignement/apprentissage de savoirs curriculaires, alors que dans le cas des problèmes ouverts, comme nous l'avons déjà précisé précédemment, les savoirs en jeu sont parfois difficiles à repérer. Celle-ci nous permet néanmoins de différencier les pratiques du problème ouvert des cinq professeurs (Cf. Tableau 4).

Les cinq enseignants atteignent le niveau 3 des pratiques : ils proposent des problèmes consistants, laissent chercher les élèves et organisent des mises en commun. Seuls E2 et E4 atteignent le niveau 4 en réussissant à hiérarchiser les productions des élèves, E3 ne l'atteint que partiellement. Aucun enseignant n'atteint le niveau 5 : les professeurs des écoles observés n'institutionnalisent que peu de savoirs et savoir-faire ; ceci même si E4 tente de décontextualiser un moyen de trouver des solutions et si E2 essaie de faire découvrir la notion de preuve mais sans la décontextualiser.

Niveau 3 : *les problèmes choisis sont consistants, un temps significatif est réservé aux recherches des élèves, des mises en commun des résultats sont organisés*	Les cinq enseignants
Niveau 4 : *les enseignants hiérarchisent les productions lors de la mise en commun des résultats*	E2 et E4 E3 partiellement
Niveau 5 : *les enseignants décontextualisent les résultats, ils institutionnalisent des savoirs, des savoir-faire.*	Aucun des cinq enseignants E4 tente de décontextualiser un moyen de trouver des solutions E2 essaie de faire découvrir la notion de preuve sans décontextualiser

Tableau 4 : répartition des enseignants selon les niveaux de pratique atteints

Finalement, nous avons pu mettre en évidence deux profils d'enseignants proposant des problèmes ouverts au cycle 3 :

- Un premier profil -profil 1- d'enseignants dont l'enjeu principal à travers ces séances est de faire chercher les élèves.
- Un second profil -profil 2- dont l'enjeu principal est de faire apprendre des mathématiques en cherchant. À l'intérieur du profil 2, nous définissons deux sous-profils par des projets différents des enseignants : faire apprendre des moyens de trouver des solutions- profils 2a- (en passant par des schémas par exemple) et faire découvrir et fréquenter la notion de preuve aux élèves – profil 2b-.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

À travers ce travail, nous avons réalisé une description et une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lorsqu'ils étudient des problèmes ouverts en classe. Les différentes analyses effectuées nous ont permis de définir deux profils de professeurs utilisant ces problèmes en classe.

Ce travail est en cela un début de réponse à l'intérêt des problèmes ouverts pour l'école primaire. La définition du profil 2, concernant des enseignants ayant un projet quant à l'étude de ces problèmes en classe, nous semble en effet justifier de cet intérêt des problèmes ouverts pour le cycle 3 en termes d'apprentissages possibles pour les élèves (en particulier, la découverte de la preuve et de moyens de résolution tels que la schématisation et la modélisation).
Notre recherche peut alors s'orienter selon deux axes de travail principaux :

Axe 1 : poursuivre l'étude des savoirs en jeu dans ce type de problèmes et lors des séances qui leur sont dédiées

Il s'agit d'étudier les problèmes choisis par les enseignants en affinant et faisant évoluer les critères d'analyse *a priori*, en termes de problématisation (Orange 2002) par exemple. Ce travail a été amorcé dans le cadre du projet *Ditactic* (collaboration entre les deux laboratoires CREN, Nantes, et CREAD, Rennes, 2015-2016). Des résultats seront présentés lors du colloque international ICME 13 de l'année 2016.

Axe 2 : poursuivre l'étude des pratiques du problème ouvert

Il s 'agit de poursuivre l'étude de la pratique du problème ouvert afin de préciser la pratique quotidienne d'un enseignant. Une analyse en termes de vigilance didactique (Charles-Pézard, 2012) est envisagée notamment en direction du repérage *a priori* des savoirs en jeu, par l'enseignant et le chercheur, et de l'étude *a posteriori* du processus d'institutionnalisation. Nous avons débuté ce travail dans le cadre d'une recherche collaborative avec des professeurs des écoles, des professeurs de mathématiques, débutants et expérimentés, et des conseillers pédagogiques (2014-2016) ainsi que dans un groupe de recherche interdisciplinaire sur les pratiques débutantes (ESPE de Nantes).

Par ailleurs, il nous semble également intéressant de poursuivre nos analyses des pratiques du problème ouvert en termes de e-genre (Butlen, 2004) afin de comprendre en quoi l'utilisation de ces problèmes en classe peut permettre de cerner la place attribuée aux mathématiques dans la formation des élèves en tant que futurs citoyens, en leur montrant, par exemple, que faire des mathématiques, cela peut commencer par prendre des initiatives personnelles pour résoudre des problèmes.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G., MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : Scéren éditions.

ARTIGUE M. (2011) *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Paris : Unesco éditions. 116 p.

BUTLEN D. (2004) Deux points de vue pour analyser les pratiques observées. In Peltier M.-L. (Ed.) *Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La Pensée Sauvage. 33-42.

BUTLEN D., CHARLES-PEZARD M., MASSELOT P., PELTIER-BARBIER M.-L. (2004) *Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La pensée sauvage.

BUTLEN D., CHARLES-PEZARD M., MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques, quelle formation ?* Grenoble : La pensée sauvage. 282 p.

CHARLES-PEZARD M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol 30-2, 197-261.

CHOQUET C. (2014) *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à des problèmes ouverts au cycle 3.* Thèse de doctorat. Nantes.

DOUAIRE J. (2006) *Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire*. Thèse de doctorat, Paris 7, Paris.

DOUAIRE J., HUBERT C. (1999) *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. ERMEL, INRP. 208 p.

DURPAIRE J.-L. (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*, rapport n° 2006-034, IGEN. MEN. 70 p.

GEORGET J.-P. (2009) *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de doctorat, Paris 7, Paris.

GUEUDET G., TROUCHE L. (2010) *La transposition didactique Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes, INRP.

HERSANT M. (2010) *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques,* Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches. Nantes.

HERSANT M., MORIN C. (2013) *Pratiques enseignantes en mathématiques : expérience, savoir et normes*. Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux. (2008).

HERSANT M., THOMAS Y. (2008) Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3. *Actes du 35è colloque Copirelem, Bombannes 2008.* ARPEME.

HOUDEMENT C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 31-59.

KAHANE J.-P. (2003) *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Formations des maîtres et recommandations associées*. Paris : CNDP, Odile Jacob.

MEN-DEEP (2010) Les compétences en mathématiques des élèves en fin d'école primaire. Note d'information n° 10-17.

Men (2008) *Horaires et Programmes d'enseignement de l'école primaire*. Bulletin officiel, Hors-Série n° 3.

OCDE (2013) Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012, OCDE éditions, 280 p.

ORANGE (2002) Apprentissage scientifique et problématisation, *Les sciences de l'Education, pour l'Ere nouvelle*, 33 (1), 25-42.

ROBERT A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(2), 57-80.

ROBERT A. (2005) Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 209-249.

ROBERT A. (2008) Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques, in Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques des enseignants*, Partie 1, 31-59. Toulouse : Octarès.

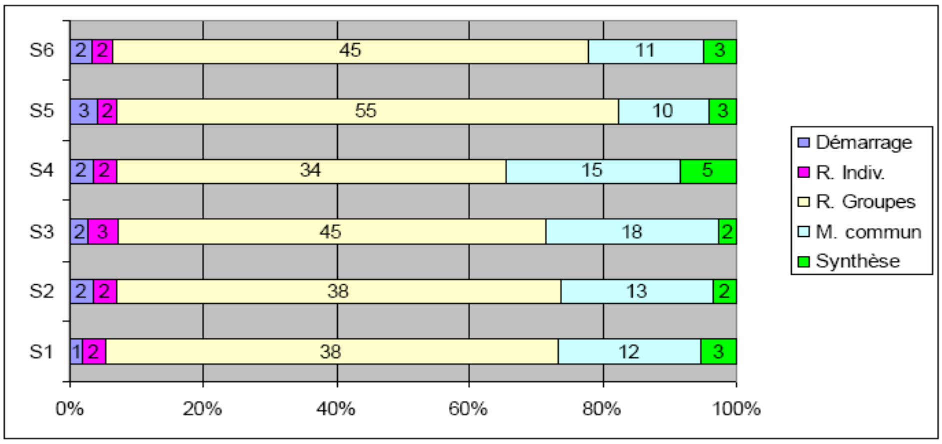
ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528.

RODITI E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan, Savoir et Formation. 196 p.

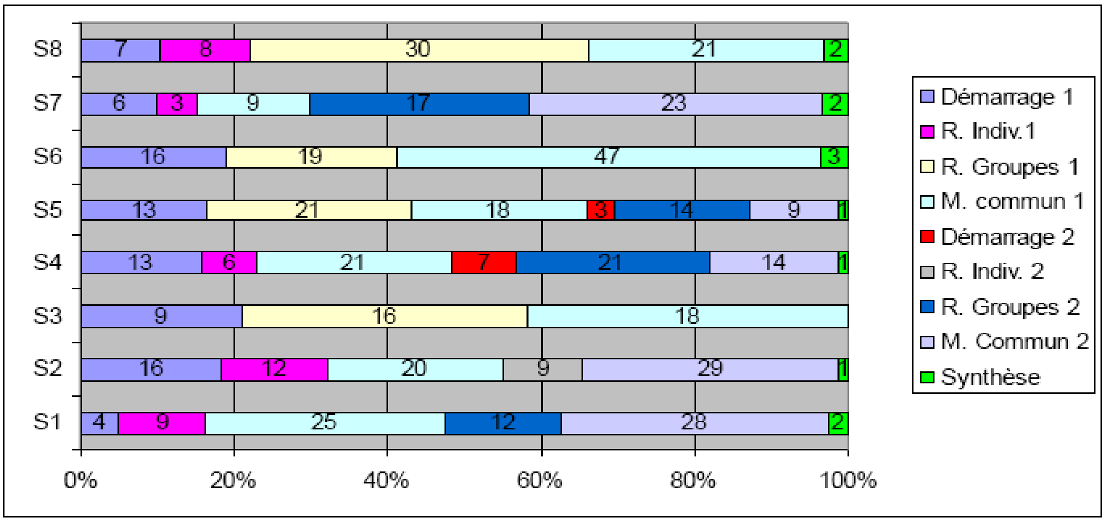
ROGALSKI J. (2000) Approche de psychologie ergonomique de l'activité enseignante. *Actes du 26è colloque Copirelem Limoges 1999*, IREM de Paris 7, 45-66.

ANNEXE 1

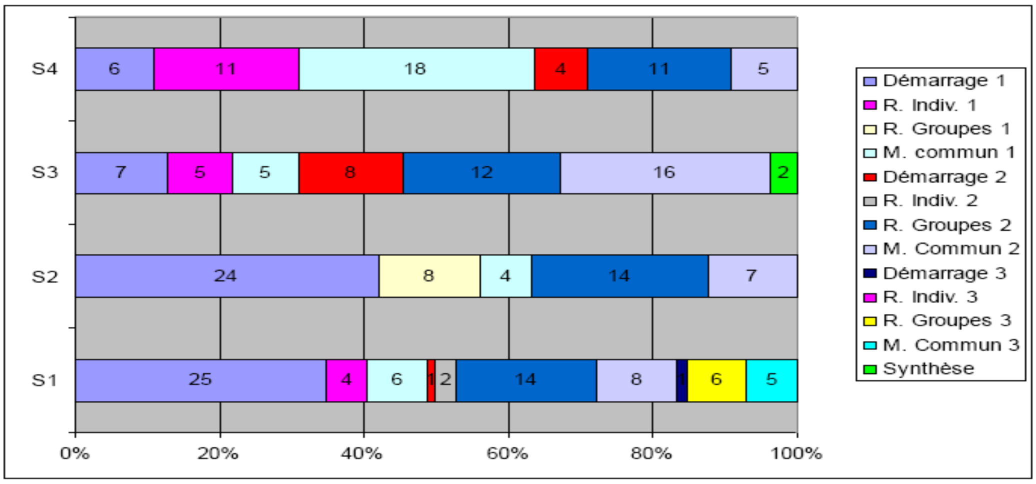
Répartition des phases pour l'enseignant E1



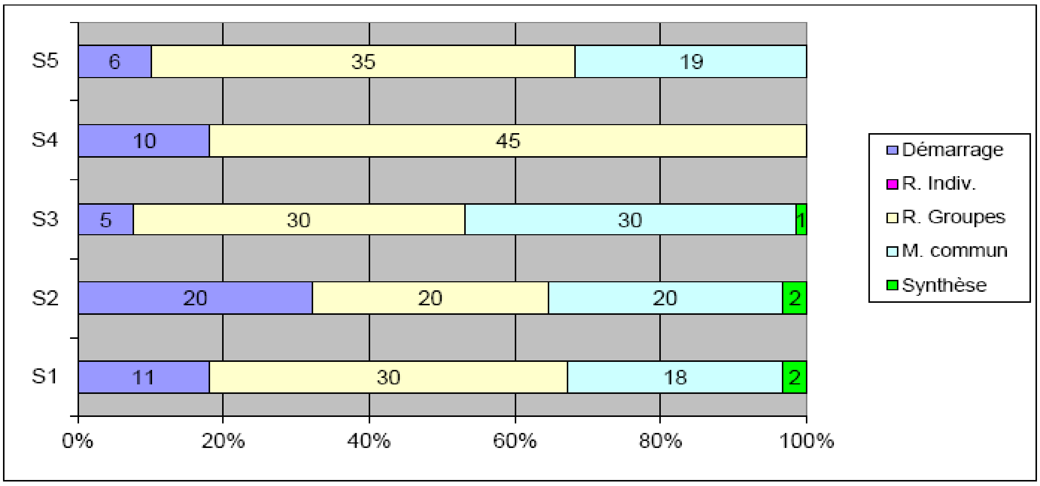
Répartition des phases pour l'enseignant E2



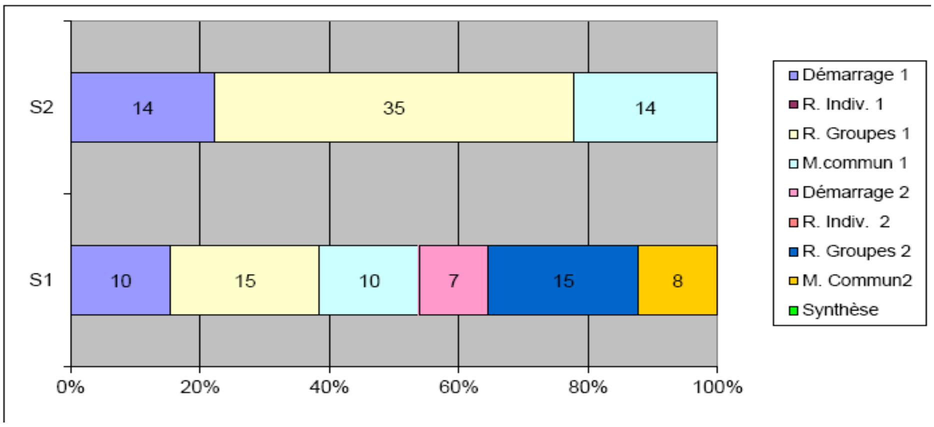
Répartition des phases pour l'enseignant E3



Répartition des phases pour l'enseignant E4



Répartition des phases pour l'enseignant E5



SUPPORTS, MODALITES DE TRAVAIL SCOLAIRES ET INEGALITES D'APPRENTISSAGE

Élisabeth **BAUTIER**
CIRCEFT-ESCOL, Université Paris 8
bautier@wanadoo.fr

Stéphane **BONNÉRY**
CIRCEFT-ESCOL, Université Paris 8
stephane.bonnery@univ-paris8.fr

Résumé
Les manuels scolaires d'élémentaire et du collège sont étudiés en tant que supports de l'activité de l'élève, qui matérialisent des formes de raisonnement que l'apprenant doit réactiver pour apprendre. Ils ont évolué depuis 1945, dans le sens d'une plus grande élévation des exigences intellectuelles et culturelles qu'ils requièrent pour être compris dans la perspective des savoirs à acquérir. Ils comportent ainsi des textes et documents qui relèvent de systèmes sémiotiques plus diversifiés, visent et intègrent des savoirs notionnels et conceptuels qui découlent des savoirs savants en même temps que des connaissances ordinaires, tout en formulant de manière moins synthétique et explicite ce qui doit être su pour que l'élève le construise. Simultanément, les manuels ont progressivement cadré moins étroitement et linéairement l'activité des apprenants, pour solliciter la réflexion, mais l'ont fait de façon très opaque, laissant les socialisations familiales piloter davantage la lecture de tels supports. Ainsi, la période historique d'unification du premier degré et du collège ayant conduit à la massification du lycée n'a pas seulement confronté un public nouveau à des exigences autrefois réservées à une minorité, mais a vu s'accroître ces exigences faites à tous. C'est un des éléments qui contribue à expliquer la persistance des inégalités malgré la démocratisation scolaire. Inégalités d'autant plus grandes que devant la difficulté d'une grande partie des élèves, en réalité les exigences s'affaiblissent et sont donc différenciées selon les publics scolaires.

Mots clés
supports pédagogiques ; manuels ; inégalités scolaires

ÉTUDIER LES SUPPORTS POUR COMPRENDRE LES INEGALITES D'APPRENTISSAGE

Nous présentons ici les résultats d'un chantier de travail sur les supports pédagogiques écrits, conduit dans notre équipe de recherche, dans lequel l'étude des manuels et de leurs usages différenciateurs en école élémentaire et collège est mise en relation avec celle d'autres supports tels que les fiches pédagogiques en maternelle (Bautier, dir., 2006 ; Joigneaux, 2015a)[1], les lecteurs numériques d'écoute en cours d'éducation musicale au collège (Eloy, 2015), ou sur les albums de littérature de jeunesse (Bautier, Crinon, Delarue & Marin, 2012 ; Bonnéry, 2010, 2015b). Ce chantier porte à la fois sur l'étude des formes de discours scolaires et du caractère « composite » des supports actuels (Bautier & al, 2012 ; Bautier & Delarue-Breton, 2014), sur l'évolution diachronique du niveau de complexité de l'activité que les élèves doivent conduire pour apprendre (Bonnéry, 2011 ; Lavieu-Gwozdz & Richard-Principalli, 2014 ; Joigneaux, 2015b), et sur la comparaison entre supports d'enseignements et les épreuves d'évaluation comme PISA, la logique de celles-ci influençant celle de ceux-là (Bautier, Crinon, Rayou & Rochex, 2006). En plus de l'étude de ce que les supports constituent comme espace de possible pour l'activité, nous étudions également les inégalités qui peuvent résulter de l'usage différencié qu'en font les enseignants (Bonnéry, Crinon & Simons, 2015), les élèves (Bonnéry, Crinon & Simons, 2016), ou les familles (Kakpo, 2012).

Un ouvrage récent (Bonnéry, dir., 2015a) a rassemblé différentes contributions qui donnent à voir la cohérence de ce chantier, le lecteur pourra s'y reporter pour ce qui concerne d'autres dimensions que les manuels et leurs usages en classe. C'est ce dernier aspect que nous développerons ici, en reprenant de larges extraits de l'introduction et du premier chapitre (co-écrit avec Séverine Kakpo) de ce livre, avec l'aimable autorisation des éditions La Dispute. Le lecteur curieux des autres volets de ce chantier pourra se reporter aux autres chapitres de l'ouvrage.

Si nous en sommes venus à nous intéresser aux supports pédagogiques sous ces différents angles, c'est que nos travaux précédents sur la construction des inégalités scolaires, avec ceux de bien d'autres chercheurs[2], avaient exploré les activités socialement différenciées des élèves récurrentes dans divers contextes d'observation, ainsi que les types récurrents de pratiques enseignantes, et qu'il nous semblait maintenant important de comprendre ce qui participe à ces récurrences. En effet, si des pratiques similaires se retrouvent en partie (malgré des différences) chez des enseignants aux trajectoires sociales et scolaires très variées et aux convictions pédagogiques dissonantes (Rochex & Crinon, dir., 2011), des explications pourraient être avancées par la formation qu'ils ont reçue par exemple, mais aussi, et c'est la voie que nous avons choisie, par les instruments qu'ils ont à leur disposition.
Ces supports sont donc envisagés à une échelle intermédiaire, méso-sociologique, entre les constats à l'échelle macro-sociologique (statistiques sur les inégalités sociales de réussite selon l'origine sociale par exemple) et les observations dans la classe, à l'échelle micro-sociologique. Il s'agit d'identifier les formes d'activité et de raisonnement que le support matérialise par ses prescriptions et son organisation interne, et qu'il permet (sous conditions de pré-requis), encourage ou tolère, au travers des formes de « cadrage » (Bernstein, 2007) qu'il opère de l'activité de l'élève et de l'enseignant, sur des aspects plus ou moins pertinents pour apprendre les savoirs en jeu.

[1] Ces résultats sont confirmés et poursuivis dans des recherches d'autres laboratoires (Durler, 2016 ; Richard-Bossez, 2016).

[2] Si nous insistons ici sur les déclinaisons de ce chantier dans notre équipe, l'ouvrage situe bien davantage celui-ci dans le paysage de la recherche en éducation, à la croisée entre sociologie, didactiques, histoire, psychologie et études littéraires, avec une importante bibliographie thématisée, impossible à évoquer ici (Bonnéry, dir., 2015a).

La dimension « écrite » du support est ici déterminante car on sait que les curriculums scolaires, dans les sociétés fortement et anciennement scolarisées, et dans l'école française en particulier, sont particulièrement porteurs des logiques de la « littératie » au sens décrit par Goody (1979, 2007). On désigne là les logiques de raisonnement propres à des formes bien spécifiques de la culture écrite, réflexives sur les activités elles-mêmes, prenant leurs distances vis-à-vis du flux temporel de leur réalisation (possibilité de revenir en arrière grâce aux traces écrites par exemple)[3]. L'apprentissage de ces formes de raisonnement, s'il n'est pas ou s'il est mal pris en charge par l'école, peut créer des difficultés pour les élèves qui en sont les moins familiers. Les supports sont envisagés pour les « pouvoirs cognitifs » et les « technologies intellectuelles » (Goody, 1979, 2007) dont leur forme écrite (structuration de l'espace graphique, articulation texte / image / document, etc.) est porteuse. Le support écrit, exerce ainsi un cadrage de l'activité cognitive en sollicitant la réalisation de ce que nous appelons des « sauts cognitifs » : prescrivant des tâches, invitant à prélever des informations ou des indices, à faire des expériences et à se poser des questions, il propose des cas différents permettant comparaison, déduction, généralisation… Ce « cheminement intellectuel », que nous avons cherché à mettre au jour dans chacun des corpus qui sont étudiés, doit trouver un aboutissement en étant explicité comme objet d'apprentissage.
Ainsi, en s'inspirant de travaux précurseurs (Chamboredon & Prévôt, 1973), pour regarder de plus près le cadrage de l'activité, nous cherchons à identifier les « définitions sociales de l'apprenant » qui sont à l'œuvre dans les supports : quelles connaissances ou postures cognitivo-langagières sont pré-requises qui correspondent à des habitudes constituées inégalement selon les caractéristiques des familles ? quelles formes de cadrage conduisent tous les élèves vers les mêmes apprentissages ou les dissocient selon leurs profils sociaux ? De cette manière, on cherche à comprendre ce qui trame les pratiques pédagogiques qui contribuent aux inégalités d'apprentissage.

Étudier les manuels en tant que supports

Les premières enquêtes disponibles au sujet de l'usage des manuels scolaires montrent que même si les enseignants ont été encouragés à se distancier des supports préétablis pour élaborer eux-mêmes leurs propres outils, le manuel reste une ressource essentielle de l'enseignement dans la plupart des disciplines en élémentaire et au collège, bien qu'il devienne un support utilisé de façon moins exclusive qu'auparavant (Borne, 1998 ; Choppin, 1992 ; Plane, dir. 1999). C'est le cas pour conduire une séance, où il peut être utilisé comme référent principal de l'activité, ou complété par des photocopies. Il est encore à la fois une ressource fréquente et moins souvent l'objet unique pour la conduite d'une discipline dans une classe au cours de l'année, puisque tantôt il guide la progression, et tantôt il cède la place à une succession de photocopies tirées de manuels de différents éditeurs rangées dans un classeur. Et quand les enseignants créent eux-mêmes leur support, il semble que ce soit en imitant la forme des manuels et des fichiers proposés par les éditeurs qu'ils ont l'habitude d'utiliser mais souvent en les découpant, les segmentant, croyant ainsi rendre leur usage plus aisé pour les élèves. Nous décrirons ici les évolutions des dispositions sollicitées par ces supports, inscrites dans leur matérialité, en montrant qu'elles vont dans le sens d'une élévation des exigences littératiées et des conditions de compréhension ou plus précisément de construction des significations. Le cadrage de l'activité par le support est déterminant dans le fait de conduire vers l'activité plus complexe tous les élèves, ou une partie seulement, les autres étant réduits à des exigences moindres.

[3] Différentes conceptions de la littératie existent, et les emprunts à Goody diffèrent selon les disciplines (par exemple en didactique : Kara & Privat, dir., 2006). Nous retenons ici ce qui étaye notre approche sociologique.

Notre propos porte principalement sur les classes du CE2 à la 6ème[4] : cette tranche d'âge permet de considérer que l'apprenant supposé est autonome dans le déchiffrage des consignes, et que l'on s'intéresse ici aux autres difficultés qu'il peut rencontrer sur d'autres plans. La démonstration privilégie l'évolution des exigences et de « l'effet » du support, en n'évoquant que rapidement, à titre de confirmation, les formes d'appropriation effectives et inégales selon les élèves observées dans les classes car nos publications précédentes avaient inversement mis l'accent sur les manières différentes qu'ont les élèves de se confronter aux objets scolaires. Notre analyse des formes de raisonnement sollicitées par les manuels s'inspire et complète les contributions d'autres auteurs, en sociologisant le point de vue qui n'est pas celui de ces auteurs (Vignier, 1997 ; Boyzon-Fradet, 1997 ; Niclot, 2009).

Les manuels anciens : un élève étroitement guidé et qui mémorise

Une des évolutions les plus marquantes des manuels tient au fait que le centre de gravité s'est déplacé des savoirs exposés vers les activités considérées comme le moyen de les construire. Avant de montrer ces évolutions, il convient d'identifier les caractéristiques les plus fréquentes des manuels des deux décennies d'après-guerre (1945-1964), avant que les programmes n'aient pleinement intégré les changements produits par l'école unique et l'entrée dans le secondaire progressivement encouragée pour tous. Notamment, les savoirs y étaient délivrés « clés en main », c'est-à-dire déjà institués comme objet d'étude à partir d'un objet du monde (la grammaire étudiant la langue, la géographie étudiant les littoraux perçus autrement au quotidien, etc.). La « mise en relation » entre cet objet du monde et le point de vue scolarisé par le biais d'un savoir disciplinaire sur cet objet était opérée par le manuel, délivrée au travers d'un texte de savoir. On attendait surtout des élèves qu'ils soient capables de mémoriser-restituer ces textes légitimes, donnés en modèle, ou de reproduire des exercices au genre bien normé, aspects que validait principalement le certificat d'études primaires. La conception de l'apprentissage en acte était alors qu'apprendre venait en mémorisant les textes et les explications délivrées : ce qu'il y avait à « comprendre » était pour l'essentiel donné à voir, à lire, à entendre dans l'enseignement primaire.

Une énonciation linéaire du savoir

Les dispositions sollicitées, et par là l'apprenant supposé, peuvent être objectivées dans l'analyse des manuels. Dans cette optique, nous développons ici un exemple à partir duquel nous allons présenter les caractéristiques dominantes dans les manuels de toutes les disciplines que nous avons étudiées et qui ont connu de fortes évolutions (celles-ci seront présentées à la suite). Il s'agit d'un manuel de « leçons de choses » de cours élémentaire de 1958 (Lasalmonie & Fournier), dont la dernière leçon est intitulée « Le hanneton » : le manuel étant structuré par la chronologie des saisons et structurant l'ordre des leçons en classe, cette leçon était donc traitée en fin de CE2. Bien que ce ne soit pas le cas pour tous les manuels de l'époque concernée, dans celui-ci toutes les leçons sont traitées sur une double page (format qui s'est imposé depuis). Sur la page de gauche, une photographie et des schémas illustrent le texte principal qui emplit presque entièrement la page de droite. Ce texte de savoir est organisé en trois paragraphes, numérotés, d'une dizaine de lignes chacun. Le savoir est présenté explicitement, de façon affirmative dans un texte synthétique et progressif. Dans une colonne colorée à droite du texte principal, en vis-à-vis de chaque paragraphe figure un texte très court, d'une ou deux phrases, qui met en exergue les savoirs à retenir, reprenant le vocabulaire en gras dans le texte principal.

4 Les corpus évoqués empruntent à volets du chantier de recherches (Bautier & al., 2012 ; Bonnéry, 2011 ; Kakpo, 2012). Sont ici pris en compte 40 manuels de différentes disciplines (12 publiés de 1945 à 1965, et 28 publiés depuis 2000) et observé 30h d'utilisation de ceux-ci.

Ainsi, quand la première partie du texte de savoir est « I - Les trois parties du corps (…) Observons un **hanneton**. Son corps est formé de **trois parties** : la **tête**, qui porte les **antennes** et les **yeux** ; le **thorax**, qui porte les **pattes** et les **ailes** ; l'**abdomen,** qui ne porte rien (1). », le petit texte sur fond coloré est le suivant : « La tête, le thorax et l'abdomen sont les trois parties du corps du hanneton ».[5]

Enfin, en bas de la page dans une typographie plus petite, figurent des exercices complémentaires sous forme de phrases à trous. Celles-ci, dans leur apparition chronologique, attirent l'attention sur les savoirs qui doivent être retenus, pas à pas, chacun des trous correspondant successivement à l'apparition progressive d'informations dans le texte de savoir et son « résumé » sur fond coloré. Ainsi, la première phrase de l'exercice complémentaire, renvoyant au début du texte de savoir et à la première phrase du résumé, cités ci-dessus, est :

> « Le corps du hanneton comprend . . . . parties : la . . . ., le . . . ., l' . . . . ».

L'apprenant supposé est ici censé mobiliser, par la répétition notamment, des dispositions à identifier-mémoriser-restituer des éléments délivrés « clés en main » et déjà pré-inscrits dans la discipline qui construit en objet d'étude l'objet du monde, ici le hanneton. Et l'exercice à trous montre bien que l'apprenant n'est pas supposé avoir des pré-requis ni des savoirs produits par inférence. C'est le cas pour les éléments de savoir, entièrement fournis par le manuel, comme pour le cheminement intellectuel : cet exercice procède d'un cadrage de l'attention sur les éléments qui doivent être identifiés comme importants, qui sont à mémoriser dans un ordre linéaire, et dont la hiérarchie d'importance est également délivrée. Cet exemple illustre des caractéristiques récurrentes du manuel de sciences de cette époque qui doit être *« immédiatement accessible »* à l'élève (Guedj & Kahn, 2010, p. 193), dans des textes simples, comme le préconisent les instructions officielles d'alors.

Cet exemple illustre encore d'autres caractéristiques, cohérentes avec celles qui viennent d'être mentionnées. C'est notamment, la présence côte à côte, sur deux pages, d'un texte de savoir et des documents (une photographie et des schémas) qui sollicitent une mise en relation simplement linéaire et même guidée. Ainsi, des pastilles numérotées dans le texte renvoient chacune à un schéma numéroté de la page de gauche. La première de ces pastilles est représentée « (1) » entre parenthèses dans la première des citations ci-dessus. Elle renvoie à un schéma intitulé « Les trois parties du corps du hanneton », où la légende est constituée de trois mots « tête, thorax, abdomen », reliés aux trois parties du corps représenté. L'image n'est ici qu'une illustration du texte dont elle est redondante. La « mise en relation » qui est sollicitée est linéaire (Vignier, 1997), c'est-à-dire univoque et guidée chronologiquement. Et cette linéarité du cheminement intellectuel est cadrée par les indices sémiotiques (mots en gras, pastilles, contiguïté du résumé à mémoriser), eux-mêmes encadrés par un texte de savoir ordonné par un plan numéroté. Dans d'autres manuels, les modalités du cadrage varient, par exemple avec des indices sémiotiques différents, mais ce cadrage étroit est une tendance générale de cette période.

Une présentation narrative des savoirs

Une autre caractéristique alors récurrente, liée à la précédente, et qu'illustre notre exemple, tient au type de savoirs qui doit être appris. D'abord, ces savoirs sont clairement inscrits dans une seule discipline de référence, aux frontières nettes, tant avec les autres matières scolaires et les disciplines savantes qui les inspirent, qu'à l'intérieur de la discipline. La mobilisation des dispositions est balisée par les habitudes que l'on construit dans cette discipline, en même temps que l'objet. On verra qu'il en va autrement aujourd'hui.

---

5 Dans cette citation comme dans toutes celles qui suivent, tous les mots mis en gras le sont dans le manuel.

De plus, à l'instar de la zoologie et du courant naturaliste encore marquant à cette époque, les textes de savoir sont marqués par le genre du récit ou de la description qui classe et compare :

> « C'est au mois de mai que l'on trouve des hannetons. Ils bourdonnent, le soir, autour des arbres »
> « Le hanneton est un insecte »
> « Le corps du hanneton ne contient pas d'os. Il n'est pourtant pas aussi mou que celui de l'escargot »

Dans ce type de textes, narratifs ou descriptifs, les modalités de « mise en lien » entre l'objet du monde et le point de vue, second, d'étude, que constituent les catégories de description et de classement, sont données par le texte du manuel comme des « vérités » et non pas comme une information à interroger, encore moins à construire.
Des années cinquante à aujourd'hui, progressivement, mais surtout depuis vingt ans, cette prédominance du récit et de la description fait place à une plus grande visée conceptuelle et à des représentations modalisées dans l'ensemble des disciplines. Par exemple, *« l'histoire et la géographie s'intéressent davantage aux structures économiques et sociales, aux courbes et diagrammes, et moins à la description des paysages ou au récit des événements »* (Prost, 1985, p. 70).
Si les manuels récents comportent davantage de concepts, c'est parce qu'ils sont marqués par des savoirs savants transposés et par une didactisation de l'enseignement. Alors que dans ceux des années cinquante, les savoirs sont moins conceptuels également parce qu'ils sont issus des « pratiques sociales de référence » (Martinand, 1986) partagées par les élèves des classes populaires. Dans notre exemple, on trouve ainsi d'autres formes de récits porteurs d'un regard sur les insectes marqué par l'horticulture (la France est encore très rurale), ou encore par la constitution d'un regard touristique ou d'observation scolaire du monde environnant, ancré dans les saisons auxquelles peut s'exercer l'observation décrite :

> « En juin, il pond ses œufs dans la terre et meurt. De petits animaux qui ressemblent à de gros vers, et que l'on appelle des **vers blancs**, sortent des œufs. Le ver blanc vit dans la terre ; avec ses fortes mâchoires, il coupe les racines des salades, des carottes, d'un grand nombre de plantes. Il est **très nuisible**. »

Une présentation simplifiée des savoirs

De plus, la présentation des savoirs montre clairement une volonté de simplification. Cette leçon sur le hanneton l'illustre, avec le traitement d'une notion fréquente, quelle que soit l'époque, dans les manuels de sciences : les changements d'état (Guedj & Kahn, 2010), ici les métamorphoses. C'est l'objet du dernier paragraphe du texte de savoir :

> « III. Une vie bien curieuse (4)
> Durant le mois de mai, le hanneton se nourrit de bourgeons et de feuilles. En juin, il pond ses **œufs** dans la terre et meurt. De petits animaux qui ressemblent à de gros vers, et que l'on appelle des **vers blancs**, sortent des œufs. [...] A la fin de la troisième année, le ver blanc s'immobilise, devient brun : il s'est transformé en **nymphe**. De la **nymphe** sortira le **hanneton**. »

La pastille (4) renvoie à un schéma, intitulé « De l'œuf au hanneton » dans lequel la représentation des quatre états correspond au nombre d'états décrits et à leur apparition dans le texte cité. Les mots en gras dans celui-ci sont repris comme légende de chacun des quatre dessins du schéma (sauf le dernier qui est légendé « l'insecte » et non « le hanneton »). Ces représentations sont alignées de gauche à droite et reliées de l'une à l'autre par des flèches qui montrent un sens d'évolution. L'accent est mis sur les états successifs, observables comme caractéristiques, de la vie de cet insecte, davantage que sur les processus ou les conditions des changements d'état. Si l'absence de mention de « l'accouplement » s'explique probablement pour des raisons de mœurs, les schémas ne représentent absolument pas les évolutions internes à l'un des états, pas plus que les étapes entre deux états, tels que la ponte, ou la sortie du ver blanc de l'œuf, ou des modalités de transformation en nymphe puis en hanneton, remplacés par les flèches linéaires. Le même souci de la simplicité se retrouve dans le vocabulaire, correspondant également au fait que nous sommes en fin de CE2 : « transformé » apparaît, mais pas « mue » ni « métamorphose ».

Cette volonté de simplification, et de cadrage étroit de ce qui doit être retenu, avec le recul historique dans un contexte qui n'était pas celui de la démocratisation scolaire, ne doit pas conduire à penser que l'on ne demandait pas à l'élève de réfléchir, d'observer par lui-même. Au contraire, c'est même une des évolutions du début du XXe siècle par rapport aux siècles précédents : la structuration en plan logique, visait à susciter l'intérêt de l'enfant par rapport aux expositions « sèches » des listes de règles et d'énoncés à retenir (Choppin, 1992). Ainsi, dans notre exemple comme dans les différents manuels explorés dans notre corpus et qui confirment des constats déjà réalisés[6], le texte de savoir contient des consignes pour observer des documents qui figurent sur la page de gauche en vis-à-vis, suivies de questions ou de formules qui guident le regard (*« Observons... »*) ou qui décrivent ce qui serait vu si l'on réalisait les expériences et manipulations décrites (*« Soulevons chaque élytre... »*) :

> « Combien le thorax porte-t-il de pattes ? Chaque patte est-elle formée d'une ou plusieurs parties ? Ces parties sont-elles soudées entre elles ou, au contraire, articulées ? Observons les griffes qui terminent chaque patte (2). Combien le thorax porte-t-il d'ailes ? Les deux ailes du dessus, dures, coriaces, s'appellent des élytres. Soulevons chaque élytre : une autre aile, fine, transparente, plus longue, apparaît. Ces deux ailes, protégées par les élytres, sont les ailes qui permettent au hanneton de voler (3). »

Un cadrage étroit de l'activité de l'élève

Dans ces manuels des années cinquante, le cheminement intellectuel est cadré de façon très étroite, de plusieurs manières. D'abord, les questions sont très explicites sur ce qui est à observer : l'élève n'a pas à le découvrir, la réflexion sollicitée est circonscrite à un périmètre limité. Ensuite, les pastilles numérotées, représentées entre parenthèses dans la citation ci-dessus, renvoient après chaque question, de façon linéaire, au schéma. La simplification de celui-ci par rapport à une photographie fait ressortir les aspects sur lesquels l'observation est sollicitée, et ôte des aspects qui pourraient brouiller la transmission des objectifs visés. Enfin, le texte lui-même expose, juste après la question, l'observation « réalisée » des éléments par l'auteur : on cadre ainsi l'observation effective par l'élève, qui sait ce qu'il doit retenir de son observation, sans avoir à deviner les intentions de l'auteur du manuel ni à formuler d'hypothèses. D'autant que le résumé attenant donne la réponse :

> « Le thorax porte trois paires de pattes articulées et deux paires d'ailes. Les élytres protègent les ailes qui permettent de voler. »

L'auteur du manuel, en parlant à la première personne du pluriel, désigne pas à pas le cheminement intellectuel attendu, jusqu'au résultat, donné ainsi à voir et à imiter : il enrôle l'élève dans une façon d'appréhender les questions à se poser et une façon de réfléchir pour y répondre. L'apprenant supposé est celui qui, à force de répétitions, d'exercices, saura à la fois mémoriser les contenus, et développer une disposition à l'observation par imitation de ce qui est prescrit et mis en scène par le manuel. Le cheminement intellectuel attendu est linéaire, le

---

6 Les « méthodes actives », incitant à l'observation de documents mais aussi à l'expérimentation, prônées depuis plusieurs décennies dans la discipline par la hiérarchie (avec une proximité entre celle-ci et les concepteurs de manuels), ont mis du temps à s'imposer, avec des retraits et des retours (Savaton, 2010).

rapport au questionnement que l'étude doit développer est univoque. Cela correspond à une présentation « positive » et affirmative des savoirs : les questions sont simples et leur relation avec les réponses guide vers le « vrai ». On verra que cette caractéristique aussi a connu de fortes évolutions.
Au regard de ces caractéristiques dominantes des manuels d'il y a soixante ans, on peut conclure que l'apprenant supposé était un élève « pris par la main » pour être conduit étape par étape, en cadrant étroitement le cheminement de la pensée. Celle-ci consistait en une imitation du raisonnement mis explicitement en exergue par l'auteur. Dans ce cadre, la place de l'enseignant était centrale comme intermédiaire entre le savoir et l'élève (Bernstein, 1967/1997) : c'est lui qui pilotait l'avancée dans le raisonnement en prenant appui sur la lecture linéaire du manuel. Le maître relayait « l'autorité » des savoirs affirmatifs, il fournissait les solutions de façon redondante au manuel ou bien les présentait et les faisait confirmer par la lecture du manuel. C'est l'ensemble du dispositif pédagogique bâti autour du support écrit qui a changé de logique comme nous allons maintenant le voir.
Avant cette comparaison, il est important de rappeler que cette sollicitation de dispositions minimales à retenir, réciter et imiter le raisonnement donné en exergue, correspondait aux objectifs de l'école primaire avant l'unification avec l'enseignement secondaire. Le manuel pris en exemple est significatif de ceux parus entre 1945 et 1958 : ne s'adressant qu'aux enfants des classes populaires quand ceux de la bourgeoisie étaient scolarisés à part dès l'âge de six ans, il ne vise pas à préparer la poursuite d'études (hormis une minorité de boursiers, les classes populaires étaient tenues à l'écart de l'enseignement secondaire), ni à développer des capacités d'interrogation critique sur les savoirs. Par ailleurs, des critiques s'élevaient dans l'enseignement primaire sur l'inefficacité de ces logiques de répétition et imitation préalables à la compréhension, critiques qui existaient déjà à la fin du XIXe siècle, et qui ont grandi avec les décennies. Pour ces raisons, les discours nostalgiques sur l'école et les manuels d'autrefois, à la mode dans la sphère politico-médiatique, nous semblent négliger la nécessité d'enseigner à tous des savoirs plus notionnels et de faire réfléchir tous les élèves sur ce qu'ils apprennent ; pour autant, comme nous allons maintenant le voir, les formes actuelles des manuels contribuent autrement aux inégalités, en sollicitant une réflexion sans permettre de la développer vraiment.

Des manuels actuels sollicitant une articulation d'éléments hétérogènes pour construire le savoir

A la fois parce qu'il est typique des manuels d'aujourd'hui, et parce qu'il traite une question proche de l'exemple plus ancien que nous venons de détailler, nous prendrons ici pour étayer notre propos sur les manuels d'aujourd'hui le cas du manuel de sciences de cycle 3 des éditions Magnard publié en 2003, traitant dans la double page 62-63 (et à titre de synthèse la 66-67, que l'on n'évoquera que comme complément) de la métamorphose de la chenille en papillon (Rolando, Simonin, Pommier, Nomblot, Laslaz & Combalusier, 2003). Différents éléments, précisés ultérieurement, indiquent que cette leçon est plutôt traitée en CM1, mais la différence d'un an avec le cas précédent ne nous semble pas invalider la comparaison des leçons, tant sur le plan du traitement du contenu que des dispositions sollicitées, car les caractéristiques qui vont être pointées sont dominantes dans les manuels du CE2 à la 6ème.

Une articulation requise de textes et documents hétérogènes

D'emblée, dès le titre de la double page, on dénote une évolution significative : la leçon est annoncée par une question.

« A quoi ressemble le jeune chez le papillon ? »

C’est une constante dans l’ensemble des doubles pages du manuel qui fait écho au titre du manuel : *Sciences. 64 enquêtes pour comprendre le monde*. Il s’agit bien de mettre en scène des enquêtes, une démarche d’investigation. Le passage de *« leçon de choses »* à *« comprendre le monde »* signifie une évolution de la conception de ce que c’est qu’apprendre. C’est par la sollicitation du questionnement de l’élève que ce dernier est censé réaliser le cheminement vers l’apprentissage. Le savoir n’est pas donné de façon affirmative d’emblée ; c’est le questionnement qui prédomine. Ainsi, la double page est structurée autour des rubriques successives suivantes :

« * Pour bien comprendre la question...
* Des recherches pour répondre... [rubrique toujours sous-découpée en trois questions, toujours dans le même esprit :] 1. Que doit-il se passer pour qu’une chenille donne un papillon ? [...] 2. Comment la chenille grandit-elle ? [...] 3. Et d’autres insectes ?
* Pour être sûr d’avoir bien compris »

La récurrence de ces rubriques dans chaque leçon du manuel se veut un élément organisateur pour initier à une démarche d’enquête, de réflexion dont l’acteur serait l’apprenant. Celui-ci est supposé parvenir au savoir par le cadrage de plusieurs observations, expériences, activités, évoquées dans la double page, et qui doivent être mises en relation les unes avec les autres. Des indices suggèrent ce cheminement intellectuel, notamment la présence constante toujours en bas à droite de la double page, donc au terme de sa lecture, de la rubrique « Pour être sûr d’avoir bien compris » où il est demandé à l’élève de produire lui-même le texte de savoir, qui est absent du manuel :

« Résume les étapes de la reproduction chez les insectes dans un texte en utilisant ces mots : accouplement, mâle, ponte, adulte, chrysalide, métamorphose, femelle, éclosion, larve. »

Le positionnement dans l’espace graphique découle du cheminement intellectuel suggéré : le savoir n’est « que » la conclusion ou le « point de mire » des diverses étapes précédentes de la double page. Les liens logiques entre les différents éléments apportés ne sont généralement pas donnés car c’est justement à l’élève de les produire. Pour opérer de façon adéquate les sauts cognitifs sollicités dans chacune des tâches, il faut avoir identifié non seulement qu’il y a une finalité notionnelle voire conceptuelle à la double page, mais aussi la nature de celle-ci. Si le court texte de savoir se trouve en bas à droite, c’est parce qu’il est censé être la conclusion de l’activité de mise en relation des différents éléments de la double page et que le raisonnement mené est aussi voire plus important que sa conclusion.
Dans d’autres manuels de sciences, les titres des rubriques varient, mais la logique est similaire. Ainsi, chez un autre éditeur (Guichard, 2005)[7], après un titre sous forme de question, les rubriques principales sont dans un ordre fixe : « J’observe / Je lis / Je comprends », suivies par un court texte de savoir. Celui-ci, s’il est délivré ici, est court, de trois à huit lignes, et il est toujours disposé sur fond coloré dans la partie inférieure droite de la double page : c’est au terme d’observations, d’expériences que le manuel décrit ou invite à réaliser, qu’un très court texte de savoir est formulé.
On retrouve une organisation graphique proche dans la plupart des manuels des autres disciplines, par exemple dans le manuel d’histoire que nous mentionnerons à plusieurs reprises

7 Même si ces ouvrages ne s’appellent pas eux-mêmes « manuels », mais « ateliers », car ils privilégient les expériences à faire réaliser, les réflexions ou les enquêtes à faire produire aux élèves, cela ne change rien à nos conclusions : les mêmes caractéristiques sont présentes dans les ouvrages intitulés « manuels ». Et ces livres sont très présents dans les classes où nous avons enquêté, et sont utilisés, dans ces mêmes classes pour d’autres disciplines ou dans d’autres classes pour les mêmes disciplines, exactement comme ceux que les éditeurs nomment « manuels ». Nous intégrons donc ces ouvrages dans notre appellation « manuel ».

à titre de comparaison (Clary & Dermenjian, 2010) : ici, les titres des doubles pages sont notionnels, « La construction du pouvoir royal (Xe-XIIIe siècles) », suivis de deux lignes donnant les objectifs de la séance ou les principales idées :

> « Les premiers rois capétiens étaient moins puissants que les grands seigneurs. Peu à peu, ils ont étendu leur pouvoir sur tout le royaume. »

Ensuite, viennent toujours quatre rubriques, sans numérotation, réparties sans hiérarchie dans des portions différentes de la double page et séparées par des documents, rubriques entre lesquelles les liens logiques sont à établir par l'élève :

> « La dynastie capétienne / Les atouts des capétiens / Le domaine royal s'agrandit / L'autorité royale progresse »

Enfin, figurent un lexique (« Bailli, Capétien, Sacre ») et un court « résumé » de trois phrases succinctes, titré comme tel sur un fond coloré dans l'angle inférieur droit de la page, agrémenté de la représentation d'une punaise comme s'il s'agissait du « mémo » des choses à retenir sur un panneau en liège.

Cette organisation est à l'inverse de celle de nombreux manuels d'après-guerre où la leçon précédait les exercices d'application : ces exercices devaient alors être mis en lien avec les savoirs énoncés au préalable ou au fur et à mesure de façon linéaire comme on l'a vu avec la leçon de 1958 sur le hanneton. Aujourd'hui, chacune des questions, des consignes d'observation et d'expérimentation doit être mise en lien avec une pluralité d'éléments hétérogènes (image, schéma, savoir culturel souvent traité comme étant évident…). Et chacune d'elles doit être appréhendée avec la conscience requise que le manuel (son auteur) engage l'élève dans une sorte de jeu de piste avec des balises : question-titre ou concept-titre de l'enquête (qui s'est substituée à la leçon), consignes d'activité et questions sur les documents dans la double page, apports d'informations diverses... qui doivent conduire à identifier le savoir, au terme du cheminement, donc situé en bas à droite.

Les relations logiques, les sauts cognitifs, sont à construire et à opérer à l'intérieur de la double page, entre les divers documents qui s'y trouvent présentés le plus souvent de façon éclatée, délinéarisée (Vignier, 1997), proche des hypertextes des multimédias. Dans la double page sur le papillon, on compte huit photographies, un texte descriptif sur le cas spécifique « Le développement de la chenille de la piéride du chou », un tableau de comparaison (durée et taille) des différents stades larvaires assorti d'une fiche de construction d'un graphique, l'intervention « attrayante » d'un personnage fourmi qui parle comme dans une bande dessinée, et des textes qui énoncent les questions à se poser.

Chacune des portions de la double page, chacune des consignes d'observation, chacun des documents, sont supposés être regardés-lus non pas de façon isolée, ni pour ce qu'ils affirmeraient en eux-mêmes, mais dans la recherche des liens logiques avec les autres portions et la conclusion à laquelle l'élève est supposé savoir qu'il faut parvenir : ici, ne pas se contenter de lire et regarder des choses sur le papillon et la chenille, mais comprendre le processus combiné d'évolution de l'individu et de reproduction de l'espèce, sans que ce cheminement intellectuel ne soit guidé explicitement. Il s'agit là des exigences d'une littératie étendue (Bautier & Rayou, 2009, p. 79), reposant sur une culture du document qui doit être analysé. Celui-ci est présenté de façon délinéarisée, afin de solliciter une disposition à « linéariser » (relier et à mettre en cohérence des informations disparates) et à construire un savoir de façon autonome, à construire le texte de savoir homogène correspondant à des systèmes sémiotiques au demeurant hétérogènes.

Sans cette conscience du savoir à construire qu'il faut garder en tête dans chacune des activités, et sans la conscience de ce que l'auteur du manuel vise à faire comprendre et apprendre quelque chose, le risque est grand pour l'élève non initié à ces « évidences » scolaires, comme nos

observations de classes le montrent, de passer à côté de ce qui fait l'essentiel de la leçon et qui sera évalué. D'autant que la multiplication de documents dans la double page peut faire craindre le risque de « surcharge cognitive » (Verdelhan-Bourgade, 2002).
De plus, les éléments entre lesquels les liens sont à opérer ne résident pas tous dans la double page, au contraire des « leçons de choses » qui étudiaient chaque élément un à un. Dans le cas du « jeune papillon », une clé de l'énigme à résoudre se trouve dans l'ordonnancement logique du manuel en séquences articulant plusieurs enquêtes. Ainsi, la double page doit-elle être envisagée dans le lien avec le titre de la séquence « Les divers modes de procréation animale ». Cette séquence débute par les enquêtes « Comment les oiseaux se reproduisent-ils ? » et « Comment les mammifères se reproduisent-ils ? », à la suite desquelles vient l'enquête de notre exemple « A quoi ressemble le jeune chez le papillon ? », puis figure « Quel est le rôle du mâle ? » et enfin « Des bilans, des réponses ». Ces liens à opérer ne sont pas vraiment explicites, c'est à l'élève « d'entendre » ce qui n'est que suggéré. Ainsi, l'articulation avec les chapitres précédents, qui inscrit l'enquête dans la compréhension des points communs et des différences en matière de reproduction des espèces, se fait-elle en demandant de comparer la chenille et le papillon à la lumière de la comparaison qui est censée avoir été retenue, entre la poule et le poussin, lors de la première enquête de la séquence :

> « Fais la liste des points communs et des différences entre une poule et ses poussins.
> Observe les documents 1 et 2 : énumère les points communs et les différences entre les deux individus. *[Il s'agit d'une chenille et d'un papillon]*
> La chenille et le papillon font-ils partie de la même espèce ? Écris ce que tu en penses dans ton cahier de sciences.
> Les jeunes oiseaux et les jeunes mammifères ressemblent plus ou moins à leurs parents. La chenille, elle, ne ressemble pas du tout au papillon. Y a-t-il un lien entre eux ? Si oui, d'où vient la chenille et comment se transforme-t-elle en papillon ?
> Les recherches que tu vas faire vont te permettre de le découvrir. »

Le savoir n'est plus donné « clés en mains » (Kakpo, 2012) par le manuel, c'est à l'élève de le découvrir ou plutôt de le construire. Et malgré l'énonciation finale, qui se veut « métacognitive » dans ce manuel-là, il semble justement que les « recherches » dans lesquelles les élèves sont engagés, qui sont plutôt des consignes de travail, ne permettent pas automatiquement à tous, loin s'en faut, de le construire. En effet, des dispositions sont requises sans que le manuel ne cadre l'activité de l'élève pour que celui-ci les développe. Différents cheminements dans les pages sont possibles, comme sont possibles différentes identifications d'objets de savoir, qui dans l'exemple donné peuvent être soit ponctuels soit processuels.
Le lien à faire avec les autres doubles pages du manuel apparaît aussi quand un mini-texte de savoir de quelques lignes est donné plusieurs feuilles plus loin, dans une double page intitulée « Des bilans, des réponses », accompagné, sur la pleine page de droite, d'un schéma où différentes étapes de la reproduction et de la mue de la chenille en papillon sont représentées par des dessins. Cette nouvelle double page marque la fin de la séquence, elle est donc traitée soit au bout de plusieurs semaines en demandant de revisiter les acquisitions de toutes les enquêtes précédentes pour les mettre en perspective, soit au cours de chacune, la construction de savoir sur le papillon devant alors simultanément être articulée avec la finalité de la séquence qu'il faut avoir en tête tout au long de celle-ci : savoir comparer les modes de reproduction des différentes espèces.
Parmi les dispositions différentes, on peut noter la requête implicite d'entendre ce qui n'est pas dit, de se poser des questions qui ne sont pas posées ou plutôt d'entendre de la bonne façon des termes équivoques : qu'est ce qui est à comprendre, à apprendre prioritairement dans ce fourmillement d'informations ? Quel est le réel sens de la question posée ? Car il ne s'agit pas simplement « d'observer », de « faire une liste », de « construire un graphique ». Chacune des questions doit être entendue par l'élève non seulement au sens propre, pour réaliser une chose

particulière, au travers d'une tâche (observation, comparaison, expérience, etc.) et simultanément ressaisie par lui sur un autre plan, d'identification progressive d'un savoir, en « secondarisant » (Bautier & Rochex, 1998) l'objet du monde évoqué (le papillon...), c'est-à-dire en le considérant à la fois comme objet d'études de la discipline et devant permettre l'identification et la construction d'un processus, d'un phénomène qui permettront ultérieurement de poser un nouveau regard sur le monde lui-même.
La formulation du savoir semble ici être considérée comme un aboutissement mécanique du cheminement intellectuel à opérer, alors qu'elle suppose des dispositions langagières et cognitives qui ne sont pas fournies par le manuel. De ce fait, nos observations dans les classes montrent une importance accrue de l'intervention de l'enseignant et à défaut, des dispositions acquises dans la famille. Le problème n'est donc pas que l'on sollicite la réflexion, bien au contraire, car les manuels d'après-guerre ne visaient pas autant l'exercice de l'esprit critique nécessaire au citoyen d'aujourd'hui, ni à la poursuite d'études devenue indispensable. Le problème réside plutôt dans le fait que dans les manuels actuels, la réflexion comme les connaissances pré-requises et les dispositions langagières soient considérées comme des évidences, et qu'il y ait un trop faible guidage de la façon de se saisir du support pour enseigner et pour apprendre.

Des textes de savoir synthétiques à produire par l'élève : l'institutionnalisation défaillante

Ces dispositions sollicitées pour articuler différentes portions de la double page se retrouvent sollicitées dans chacune des portions. C'est particulièrement le cas des liens à opérer entre le texte et les documents, et notamment les images. Dans notre exemple en sciences, cinq photographies numérotées de 3 à 7 sont présentées dans le désordre, accompagnées du texte suivant :

> « 1. Que doit-il se passer pour qu'une chenille donne un papillon ?
> * Dans ton cahier de sciences, classe les documents 3 à 7 dans un ordre chronologique possible.
> * Donne un titre à chacune de ces étapes en utilisant : chenille ou larve, ponte, accouplement, chrysalide, fin de la métamorphose.
> * Indique d'où sort la chenille.
> * En quoi se transforme-t-elle ?
> * A ton avis, les papillons sont-ils des animaux ovipares ou vivipares ? »

Quand il est demandé de comparer plusieurs cas entre lesquels il faut constater des différences et des points communs, les critères précis sont rarement donnés de façon explicite. Nous l'avons vu dans la même double page : « l'enquête » débute par une demande de comparaison entre une photographie de chenille et une photographie de papillon, et entre une poule et un poussin. Mais aucun critère de comparaison n'est donné. Là où le manuel d'autrefois faisait les questions et les réponses pour donner l'exemple de la comparaison attendue, avec un cadrage très étroit, ici, le cadrage est très lâche, et l'observation montre que bien des élèves dans la classe comparent des choses inappropriées, voire incongrues, ce qui ne les conduit pas à identifier les informations à mettre en relation avec la suite de la séance.
Dans le manuel d'histoire, il s'agit de comparer deux cartes montrant à deux périodes successives les possessions du roi de France et celles des vassaux pour donner du contenu à la notion de « construction du pouvoir royal ». La notion de pouvoir n'est pas définie ni « mise en texte », mais suggérée par l'agencement attendu des documents évoquant ici l'idée possession de territoire, et ailleurs celle d'autorité hiérarchique, de relai de la volonté par une administration. C'est un des éléments qui « explique » que les textes de savoir, quand ils sont présents, soient plus courts, ici :

> « Hugues Capet a fondé la dynastie des Capétiens. Les Capétiens ont d'abord été peu puissants mais

ils ont renforcé peu à peu leur pouvoir. Ils ont agrandi leur royaume et créé une administration à leur service. »

En effet, la brièveté des textes s'explique d'abord par le fait qu'ils synthétisent le résultat d'une activité intellectuelle préalable de « mise en relation » qui est à conduire dans l'enchaînement des tâches ou dans l'articulation des documents hétérogènes que chaque double page fournit : l'élève est censé interpréter ces quelques lignes à partir des conclusions de chacune des activités guidées par la double page, sans que leurs relations ne soient clairement signifiées par dans le manuel. C'est à l'élève de formuler ces conclusions en savoirs intermédiaires (il en est ainsi de ce qui doit être dégagé dans la comparaison des deux cartes), et de les avoir en tête, comme des « hypertextes » numériques, pour donner du sens à la portion du résumé « Ils ont agrandi le royaume », et de relier celle-ci à la notion de pouvoir figurant dans la phrase précédente du résumé. Là encore, on sollicite des dispositions culturelles, langagières et cognitives qui ne sont pas acquises par tous. De fait, il incombe, plus qu'avant, à la conduite de la séance par l'enseignant de les construire. Si celui-ci ne parvient pas à prendre en charge cette construction avec un manuel au cadrage distendu, c'est ce que l'élève a acquis dans son milieu familial qui entre en jeu.

De plus, les brefs textes de savoir s'accompagnent d'autres énoncés, témoignages d'époque, interpellation de l'élève par un personnage récurrent dans le manuel, etc., ce qui rend plus opaque l'identification de l'auteur et de ses intentions (Laborde-Milaa, 2007).

La brièveté des textes de savoir est confirmée par un rapport de l'inspection générale de l'éducation nationale qui estime que l'exposé des savoirs ne représente, selon les cas, que de 5% à 25% en moyenne, du volume des manuels (Borne, 1998, p. 14). Au vu de ce qui précède, on aurait tort de penser que cette brièveté conduit à des exigences moindres : au contraire, c'est à l'élève, et à l'enseignant qui l'accompagne sans lui donner les solutions « clés en main » de rendre présent ce qui n'est pas écrit[8].

Or, dans le manuel, les consignes sur lesquelles repose le cadrage de « l'observation » restent très floues, alors qu'elles invitent l'élève conduire une réflexion analytique à partir de ce prélèvement d'information (et pas seulement à imiter les descriptions narratives d'observation comme dans les leçons de choses des années 50). Si les consignes plus anciennes avaient pour inconvénient de cadrer très étroitement la pensée, en ne demandant au fond que de retenir et imiter la comparaison qui était donnée à voir explicitement, aujourd'hui, on constate une tendance opposée : les sauts cognitifs sont plus difficiles à faire pour l'élève car on fait réellement appel à son raisonnement inférentiel et déductif. C'est potentiellement plus formateur, mais ces sauts sont faiblement guidés, d'où le risque important que tous les élèves ne les réalisent pas. Ainsi, alors que l'un des objectifs principaux de l'enquête proposée repose sur l'identification de différentes étapes, le titre de la portion de page est flou avec des termes équivoques « Que doit-il *se passer* pour qu'une chenille *donne* un papillon ? » (soulignés par nous). Et dans l'extrait cité plus haut sur les photographies à mettre dans l'ordre, les termes « étapes » ou « transformations » ne sont pas mis en relief, se trouvant simplement insérés dans une question. Or, à l'échelle d'une portion de page, comme on l'a vu au niveau de la double-page, les questions doivent être comprises à plusieurs niveaux pour que les sauts cognitifs soient opérés. Sous peine, face à la question « Indique d'où sort la chenille », de répondre platement, de façon segmentée, « Elle sort de l'œuf », alors que cette question doit être entendue pour son lien avec les autres : l'élément « œuf » doit être appréhendé au travers de son lien avec « ponte », « accouplement », etc.

Nos observations dans les classes montrent que ces cadrages flous encouragent chaque élève à mobiliser les raisonnements et savoirs qui lui semblent les plus évidents, selon les socialisations

[8] Et l'existence d'un résumé type dans le manuel du maître ne suffit pas à aider l'enseignant pour que celui-ci parvienne à relier ce texte à des activités intellectuelles réellement réalisées par tous les élèves à partir du support.

familiales, ce qui participe aux inégalités. Ainsi, ceux qui sont habitués à entendre, derrière des consignes, des exigences cachées, réussissent-ils plus souvent à surmonter ces difficultés que ceux qui sont habitués à entendre des exigences et des questions qui sollicitent des réponses au premier degré : ces derniers ne soupçonnent pas qu'une question formulée puisse être le véhicule d'une autre question, tacite, la plus importante portant sur un phénomène et non un fait.

De la simplification à la complexification

En invitant les élèves à réfléchir, à comprendre des notions plus élaborées, les supports pédagogiques que sont les manuels ont connu également une évolution quant au type de textes de savoir, au-delà de leur brièveté et de l'absence d'explicitation des savoirs. Ainsi, le genre textuel lui-même a évolué : les textes sont moins narratifs ou descriptifs, et plus conceptuels. On le constate avec l'emploi de termes inusités autrefois, comme ici celui de « métamorphose », ou encore dans le fait que les savoirs présentés sont moins simplifiés. L'objet d'études n'est donc plus le même. Si antérieurement on sollicitait la mémorisation des aspects caractéristiques d'un sujet décrit ou narré (une espèce animale, une période historique, etc.) présentés comme stables, comme on l'a vu pour les quatre états de la vie du hanneton, aujourd'hui, le savoir est moins un produit « fini », « vrai », on s'attache au processus autant qu'aux états caractéristiques. Les textes et documents ne donnent pas seulement à voir les états de la vie du papillon, mais aussi les changements d'état ou ce qui explique ces changements : l'accouplement, la ponte, la mue, etc. De même, en histoire, on donne des bornes historiques qui sont moins « figées » et dont on présente le caractère relatif dès le CE2, puisque les bornes peuvent varier en partie selon les critères de périodisation, ou encore que celles-ci servent de grands repères seulement. Ainsi, dans la leçon sur « La construction du pouvoir royal (Xe-XIIIe siècles) », parmi les dates délivrées, plusieurs se situent au-delà de 1300. C'est le regard du chercheur, qui s'interroge sur les connaissances énoncées et considère les dates comme des repères pour comprendre des phénomènes et non comme une fin en soi, qui est ici transposé, sollicitant une activité plus élaborée[9]. Son cadrage est moins facile qu'autrefois.
Les savoirs sont également moins simplifiés puisqu'ils combinent le spécifique et le générique. Là où autrefois les leçons portaient sur des aspects spécifiques, qui allaient de pair avec la description ou la narration (la leçon de choses sur le « hanneton », la vie d'Hugues Capet), aujourd'hui le manuel développe une autre conception des savoirs. Dans notre exemple sur le papillon, en haut à droite de la double page, il est question du cas de la chenille de la piéride du chou, dans un texte en partie narratif, tout en dégageant des aspects génériques (« on dit qu'elle **mue** », etc.). Tandis qu'en bas à gauche, on demande de classer chronologiquement les photos (déjà citées) des différentes étapes de la vie, en proposant comme légende de l'une d'entre elles « chenille ou **larve** », signifiant là discrètement, au détour d'une tâche centrée sur autre chose, que le cas de la chenille se retrouve de façon plus générale chez certaines variétés d'insectes en étant désigné sous le nom de larve. Cette intégration du spécifique et du générique n'est pas explicite, c'est à l'élève d'en construire la relation justement parce que la conception à l'œuvre est que le savoir ne doit pas être réduit, qu'il y a des relations à établir entre les points communs et les différences entre les espèces.
Cette simplification moindre des savoirs se retrouve dans d'autres disciplines. En histoire, le manuel ne consiste plus en un récit du sacre religieux d'un fils aîné de roi capétien du vivant de son père. Aujourd'hui, les élèves doivent parvenir eux-mêmes à rapprocher et distinguer les aspects spécifiques et les aspects génériques et ce faisant à hiérarchiser les éléments de savoir. Ainsi, la peinture d'époque représentant le sacre de Philippe III Le Hardi devient un exemple

[9] Ce constat converge avec d'autres recherches (Lantheaume, 2001).

spécifique de la notion générique « d'atout » dont dispose cette dynastie dans la construction du pouvoir royal, en faisant reconnaître qu'ils tiennent directement celui-ci du pouvoir divin. Les questions que le manuel associe à l'image sont les suivantes :

> Où est le roi ? Que fait-il ? Que font les évêques ? Recherche pourquoi le sacre est important pour la royauté française.

La peinture est à envisager non seulement pour ce qu'elle « dit » au premier degré, spécifique, ponctuel, mais aussi pour ce que l'on peut en déduire au niveau générique en la comparant avec d'autres cas. Les manuels d'histoire d'aujourd'hui comprennent ainsi, presque à chaque double page, un texte ou une image d'époque, relatant un événement qui, du fait du cadrage flou par les consignes, peut être appréhendé aussi bien comme une anecdote que comme une source manifestant un trait récurrent qui n'est pas donné par le manuel mais doit être déduit par la mise en relation avec les autres portions de la double page[10].
Il y a ainsi un apprenant supposé du manuel que l'on peut définir par ses dispositions à entendre ces consignes au service d'une recherche du raisonnement qui doit permettre d'identifier un savoir. Cet apprenant supposé correspond à une petite minorité des élèves des classes dans lesquelles nous avons conduit des observations. Simultanément, ces consignes ambiguës et cette multiplicité de tâches faiblement cadrées s'adressent aussi, par défaut, à un autre type d'élève, celui qui ne les reçoit qu'au premier degré, et qui répond à côté de l'objectif aux trois premières questions citées dans l'exemple précédent : ces consignes ne le guident pas vers les éléments génériques et vers le lien avec la notion de pouvoir royal. Les manuels priorisent le fait de mettre les élèves en activité, tout en cadrant faiblement celle-ci sur les points précis qui permettent d'identifier le savoir : ils participent activement à mobiliser chez les élèves des dispositions cognitives différentes. Cette tension, entre élévation des exigences littératiées, cadrage faible et consignes équivoques, influence souvent les enseignants des classes observées dans le sens du dénivellement d'exigences. Ainsi, les élèves les plus faibles sont-ils souvent interrogés en premier, sans que leur soit clairement signifié que leurs réponses n'opèrent pas les liens attendus et sont insuffisantes :

> « Où est le roi ?
> - Il est assis »

C'est tacitement que, dans un second temps, les élèves « connivents » sont souvent sollicités pour répondre :

> « Il est sur son trône, assis et les autres sont debout, c'est lui le plus fort »

C'est souvent le jour du devoir sur table que les élèves les plus faibles sont obligés d'opérer les sauts cognitifs, seuls donc, et peinent à surmonter ces difficultés. Les tensions matérialisées dans le manuel sont de fait sont de fait celles vécues par les enseignants : on ne peut pas dire qu'ils soient étroitement contraints à procéder ainsi, mais ce report de contraintes complexifie énormément leur travail au risque de le rendre impossible ; souvent, faute de surmonter la difficulté, les élèves sont eux-mêmes aux prises avec cette tension.

Les indices sémiotiques ou graphiques à prélever relèvent également moins d'une logique de simplification. Ainsi, par exemple, dans l'exercice de classement chronologique des étapes de la vie du papillon, les photographies sont celles de différentes espèces de papillons, aux couleurs variées (un papillon blanc, un autre aux ailes orange et marron, un autre à dominante

[10] L'étude diachronique des instructions officielles de l'enseignement de la littérature au lycée montre une évolution similaire : la plus grande présence de savoirs issus de la recherche universitaire invite l'élève à étudier lui-même l'œuvre en la considérant à la fois comme spécifique et à partir de savoirs génériques (figures de style, etc.) (Renard, 2011).

bleue), détail dont il faut ici faire abstraction pour se concentrer sur la demande de classement chronologique, alors que ce « détail » était important dans la portion de double page précédente où l'on demandait de lister les points communs et les différences entre une photographie de papillon et celle d'une chenille de la même espèce. La comparaison avec l'exemple précédent du manuel de 1958 est éclairante : le recours au schéma plutôt qu'à la photographie sur ce point permettait une représentation épurée qui évite ces possibles incompréhensions et tâtonnements inutiles.

L'apprenant supposé des manuels d'aujourd'hui est principalement celui qui sait que les indices qui lui sont délivrés doivent être rapportés aux critères précis de la question posée, et « filtrés » à partir de la question tacite qu'on sait être présente et à découvrir... Les élèves qui ne correspondent pas à cette définition sociale peinent à distinguer l'essentiel de l'accessoire dans les tâches.

Articuler l'impersonnel avec le personnel et le quotidien

Deux autres « mises en relation », absentes autrefois, sont sollicitées aujourd'hui, et semblent difficiles à réaliser avec le cadrage conduit par le manuel. D'une part, les savoirs savants et ceux de la vie sociale, ordinaire ou privée, n'étaient pas articulés de la même façon. Si les manuels d'il y a cinquante ans étaient moins conceptuels, c'est aussi parce qu'ils traitaient pour l'essentiel les savoirs issus de « pratiques sociales de référence » (l'horticulture par exemple) en les scolarisant. Aujourd'hui, l'élève est sollicité pour opérer plusieurs liens, potentiellement contradictoires, d'une part en scolarisant les objets du monde comme on l'a vu, mais aussi inversement en repersonnalisant les savoirs scolaires, et en les rabattant sur le point de vue habituel dans la vie quotidienne. Ainsi, la double page sur le papillon, juste avant la conclusion qui invite l'élève à formuler un texte résumant ce qu'il a compris (donc sur le monde impersonnel du texte savoir), l'invite à élargir ses conclusions précédentes à « d'autres insectes » (savoir générique) au travers de l'expérimentation (spécifique) consistant à réaliser un élevage de vers de farine. Et juste à côté figure un personnage récurrent dans le manuel, une fourmi représentée de façon anthropomorphisée, qui parle par le biais de bulles comme dans une bande dessinée et dit : « Manipule les vers de farine avec précaution : ce sont des êtres vivants. ». D'autre part, tout au long du manuel, ce personnage intervient, tel un Jiminy Criquet, comme une conscience moralisante, véhiculant des préceptes de sens commun « écolos » et hygiénistes, ou des règles de sécurité, ne relevant pas de la sphère du savoir. Le brouillage des registres est d'autant plus prégnant que le caractère attrayant du personnage, en rupture avec le reste de la double page, qui pour être très illustrée reste très scientifique, attire l'attention. Nos observations en classe montrent que les élèves sont surtout enclins à retenir seulement le conseil de bon sens, en phase avec leur vision ordinaire des choses, quand la leçon leur reste inaccessible. Alors que les élèves les plus « initiés » aux évidences scolaires voient bien, sans que cela ne leur soit dit, qu'il s'agit là de conseils à prendre au sérieux, mais que ça n'est pas l'enjeu de la leçon. Ainsi dans une double page sur l'alimentation qui cumule pareillement conseils sur l'hygiène alimentaire et les repas équilibrés et les savoirs savants sur les nutriments nécessaires au bon fonctionnement du corps humain, quand certains élèves se centrent sur l'hygiène alimentaire (et soulignent que leur maman les nourrit bien…), les élèves connivents focalisent l'objectif de la leçon sur les savoirs (Bautier, 2015).

Plus généralement, on demande donc aux élèves de circuler entre des savoirs stabilisés, donc impersonnels, et des ressentis ou des expériences personnelles, non pas pour les laisser s'exprimer sur les mêmes modalités qu'ils pourraient le faire dans la vie privée, mais pour cerner les frontières des savoirs génériques et des situations, toujours particulières, dans lesquelles on peut les mobiliser, comme « grilles de lecture » savantes de la vie en même temps que comme saisie personnalisée de savoirs scolaires impersonnels. Ces attentes reposent sur une connivence non construite par l'école.

Articuler des disciplines scolaires

La dernière mise en relation sollicitée que nous avons identifiée est entre les différentes sous-disciplines ou disciplines scolaires. Dans notre exemple en sciences, la comparaison des durées des différents stades larvaires et de la taille de la chenille à chacun de ces stades se fait par le biais de la construction d'un graphique, objectif du programme de mathématiques en CM1, qui se trouve là mobilisé dans une visée d'interdisciplinarité ou de « décloisonnement ». Ce lien n'est pas artificiel : il peut être l'occasion de visualiser une croissance dans la durée. C'est le cas pour des élèves que cette acquisition récente ne va pas mettre en surcharge cognitive ni dérouter par le « mélange » des disciplines, et qui vont pouvoir penser la croissance de l'animal à partir de cette visualisation. Nos observations en classe montrent que la charge cognitive sollicitée et la surprise due au décloisonnement disciplinaire ne sont pas des obstacles à minorer, elles nécessitent du temps et la verbalisation explicite de liens à opérer, faute desquels nombre d'élèves sont perdus. Certes ce décloisonnement est important pour construire chez les élèves la notion de points de vue pluriels sur les mêmes objets, d'adaptation nécessaire des savoirs hors de leur frontière disciplinaire, nécessaires pour comprendre la complexité du monde. Cependant, il est tout autant nécessaire, là encore, de les penser comme objets d'apprentissage et non de « déjà-là » chez tous, au risque de rendre les apprentissages plus difficiles encore pour certains qui seraient dans leur ignorance.

Conclusions

Les manuels d'aujourd'hui sollicitent une activité intellectuelle et des dispositions pour la réaliser qui sont plus exigeantes que ceux des années cinquante. Ils sont également davantage l'occasion d'encourager l'élève à réaliser des choses plus difficiles, en opérant seul des sauts cognitifs à partir de tâches, et par là, entraînent un risque d'inégalités d'apprentissage. Les élèves doivent ainsi se saisir d'une pluralité d'éléments hétérogènes, de l'ensemble des composantes d'une double page ou d'une séquence : textes de savoir, documents à étudier comme une « source » ou une « donnée » (tableau statistique, carte, témoignage d'époque...), représentations d'informations (frise chronologique, graphique, carte...), etc. Les manuels sollicitent des dispositions cognitives de « mises en relation » de nature diverse : inférences à partir des pages précédentes ou entre portions de pages, comparaison entre cas, décontextualisation, distinction entre singularité et généralité, ordonnancement chronologique, lien entre texte, image et données. C'est lié à la nature des savoirs, qui ne sont plus délivrés en textes linéaires tout prêts à l'usage de la mémorisation-restitution, mais que l'élève doit découvrir et formuler lui-même, ou charger de sens complémentaire à partir des tâches suggérées quand ils sont donnés sous forme de courts résumés. En outre, les savoirs sont présentés de façon bien moins simplifiée, en intégrant les savoirs savants et leur caractère provisoire, et en mettant en relation différents points de vue disciplinaires décloisonnés. Et ils sollicitent simultanément la construction de savoirs, impersonnels par définition, et la mobilisation de ressentis personnels et d'opinions de sens commun.

Ce sont les élèves eux-mêmes qui doivent construire un point de vue sur l'objet étudié, d'où des exigences plus grandes, des savoirs plus difficiles à s'approprier. Si l'activité sollicitée chez l'élève est potentiellement plus intéressante, le manuel cadre de façon trop diffuse cette mobilisation de dispositions, considérés comme pré-requises et non pas à développer chez tous les élèves. Ainsi pouvons-nous objectiver un apprenant supposé par le manuel, dans la connivence, qui saura se saisir des éléments de la double page avec les dispositions attendues.

Les observations dans les classes montrent que les élèves qui correspondent à ce modèle s'avèrent en général être issus de familles qui ont fait des études longues. Et par défaut, soit parce que la difficulté serait trop grande pour les enseignants de permettre à tous ces nouveaux apprentissages, soit parce qu'ils considèrent que c'est déjà important que les autres élèves participent et travaillent, ces derniers, bien plus souvent issus de familles populaires, se voient de fait dévolus des exigences moindres, qui peu à peu gênent le cumul des apprentissages et leur développement. Des travaux récents montrent que la rédaction même des textes de savoir, de leur usage de la ponctuation, complexifie la tâche des élèves (Lavieu-Gwozdz & Richard-Principalli, 2014). La logique d'ensemble du dispositif pédagogique a changé, et dans celui-ci, les places respectives du support écrit, de l'enseignant et de l'élève. L'enseignant occupe une place moins centrale comme « véhicule » des savoirs, mais plus importante (et difficile) puisqu'il est incité à cadrer l'activité de l'apprenant en cohérence avec les cadrages déjà produits ou dévolus par le manuel : cadrage pas trop étroit (sans délivrer les solutions, sans rabattre les exigences), mais suffisamment pour ne pas laisser les élèves se perdre dans le flou. Il joue un rôle crucial dans la verbalisation de ce qui n'est pas écrit mais qui est invité à être formulé, comme « mises en relation ».
Tous les manuels d'aujourd'hui ne montrent pas l'ensemble des caractéristiques qui viennent d'être décrites. Certains jouent même avec la nostalgie pour les manuels d'autrefois (et peuvent, à ce titre, être utilisés comme « contre-manuel » par les familles que les formes pédagogiques aujourd'hui dominantes déstabilisent – Kakpo, 2012). Cependant, les analyses précédentes correspondent à des tendances qui sont à l'œuvre dans la plupart des disciplines, et des travaux conduits dans d'autres équipes conduisent à penser que nos conclusions valent pour les manuels au-delà de la tranche d'âge prise en compte ici (Pautal & Schneeberger, 2015 ; Tralongo, 2015 ; Vaquero, 2016).
Par-delà ces tendances, de nettes différences existent dans les dispositifs de travail mis en place par les enseignants, lesquelles mériteraient d'être détaillées, nous avons souligné la fréquence de la simplification des manuels comme des notions à acquérir par le biais des découpages, des segmentations des double-pages, mais cette simplification ne fait alors qu'accroître les inégalités. De plus, il serait intéressant d'étudier à quels élèves, à quels types sociaux d'établissements sont destinés les différents types de manuels, par les sélections (qui ne relèvent pas toujours, loin s'en faut, d'un choix basé sur des connaissances en la matière) qui découlent de l'action des enseignants, les élus, la hiérarchie, les démarcheurs à partir des différents types de contraintes (matérielles, financières, stabilité de l'équipe dans l'établissement, etc.) et du regard porté sur les élèves. Ce pourrait être un élément d'explication des inégalités d'appropriation.
Si les manuels d'aujourd'hui nous semblent contribuer à la fabrication des inégalités d'apprentissage, ce n'est pas parce qu'ils commettraient l'erreur de vouloir faire réfléchir les élèves : le retour à ce qu'étaient les manuels d'autrefois, pour tous ou pour les seuls enfants non-connivents (des classes populaires), ne résoudrait en rien le problème de l'échec scolaire et celui de préparer une génération à poursuivre des études, et à vivre dans un monde où les savoirs savants et les écrits composites trament nombre de situations et d'outils de la vie professionnelle et citoyenne, ils doivent donc pouvoir les comprendre pour comprendre le monde dans lequel ils vivent. C'est bien plutôt le fait que cette intention de faire réfléchir les élèves soit requise sans être prise en charge par le cadrage des manuels qui est en question, ce qui laisse nombre d'enseignants également démunis ou pris au piège de longues préparations.
Car l'école fait alors appel à ce qui est construit ailleurs, donc socialement inégal. Nos travaux sur les supports, au-delà des manuels, en s'intéressant à ces objets qui circulent entre plusieurs sphères de socialisation, montrent que les albums de littérature de jeunesse notamment, constituent dans certaines familles des instruments de socialisation cognitivo-langagière et culturelle propédeutiques au décodage des manuels composites, parce que leur évolution est

très similaire à celle des manuels (Bautier & al., 2012 ; Bonnéry, 2010, 2015a, 2015b).
La réflexion pédagogique sur les supports scolaires doit donc articuler deux défis : intégrer dans les objectifs scolaires la fréquentation de nouvelles formes d'écrit, et des raisonnements qu'ils matérialisent ; ne pas considérer ces nouveautés comme relevant de l'évidence parce qu'elles sont en phase avec les manières de faire qui se sont développées dans les classes moyennes et supérieures.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BAUTIER, É. (2015), "Quand la complexité des supports d'apprentissage fait obstacle à la compréhension de tous les élèves", *Spirales,* n°55, p.11-20.

BAUTIER, É. (2006). (dir.), *Apprendre à l'école. Apprendre l'école. Des risques de construction des inégalités dès la maternelle*. Paris, Chronique sociale.

BAUTIER, É. & DELARUE-BRETON, C. (2014). Supports de travail et inégalités scolaires : l'exemple d'un manuel de découverte du monde. *Les Cahiers Pédagogiques,* n°516, 15-16.

BAUTIER, É. & RAYOU, J.-Y. (2009). *Les inégalités d'apprentissage*. Paris : PUF.

BAUTIER, É. & ROCHEX, J.-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens*. Paris : A. Colin.

BAUTIER, É., CRINON, J., DELARUE-BRETON, C. & MARIN, B. (2012). Les textes composites : des exigences de travail peu enseignées ? *Repères,* n° 45, 63-79.

BAUTIER, É., CRINON, J., RAYOU, P. & ROCHEX, J.-Y. (2006). Performances en littéracie, modes de faire et univers mobilisés par les élèves : analyses secondaires de l'enquête PISA 2000. *Revue française de pédagogie*, n°157, 85-101.

BERNSTEIN, B. (1967/1997). Écoles ouvertes, société ouverte ? *In* Forquin, J.-C., *Les sociologues de l'éducation américains et britanniques : présentation et choix de textes* (p. 155-164). Paris / Bruxelles : I.N.R.P / De Boeck et Larcier.

BERNSTEIN, B. (2007). *Pédagogie, contrôle symbolique et identité*. Laval : PUL.

BONNERY, S. (2010). "– Loup y es-tu ? – Pas exactement, c'est pour mieux te faire réfléchir, mon enfant…" Sociologie du lecteur supposé par la littérature de jeunesse, 14 p. *Actes en ligne du Congrès AREF (Genève)* https://plone2.unige.ch/aref2010/communications-orales/premiers-auteurs-en-b/Loup%20y%20es-tu.pdf/view

BONNERY, S. (2011). Les définitions sociales de l'apprenant : approche sociologique, interrogations didactiques. *Recherches en didactiques*, n°12, 65-84.

BONNERY, S. (2015a). (dir.). *Supports pédagogiques et inégalités scolaires*. Paris : La Dispute.

BONNERY, S. (2015b). Des livres pour enfants. De la table de chevet au coin lecture. *In* P. RAYOU, (dir.) *Aux frontières de l'école* (p. 193-214), Saint-Denis : PU de Vincennes.

BONNERY, S., CRINON, J. & SIMONS, G. (dir.) (2015). *Spirale*, n° 55 Supports et pratiques d'enseignement : quels risques d'inégalités ?

BONNERY, S., CRINON, J. & SIMONS, G. (dir.) (2016). *Recherches en éducation*, n° 25 Les élèves face aux outils pédagogiques : quels risques d'inégalités ?

BORNE, D. (1998). *Le manuel scolaire*, Rapport pour l'IGEN. Paris : La documentation française.

BOYZON-FRADET D. (1997) « Enseigner / apprendre la langue scolaire. Un enjeu fondamental pour les enfants issus de l'immigration », *Migrants-formation*, n° 108. p. 67-85.

CHAMBOREDON, J.-C. & PREVOT, J. (1973). Le métier d'enfant, *Revue française de sociologie*, vol. XIV-3, 295-335.

CHOPPIN, A. (1992). *Les manuels scolaires : histoire et actualité*. Paris : Hachette.

DURLER, H. (2016), L'autonomie de l'élève et ses supports pédagogiques. *Recherches en éducation*, n° 25, 57-67.

ELOY, F. (2015). La musique au collège et « l'éclectisme éclairé ». *In* S. BONNERY (dir.). *Supports pédagogiques et inégalités scolaires* (p. 109-130). Paris : La Dispute.

GOODY, J. (1979). *La raison graphique*. Paris : Minuit.

GOODY, J. (2007). *Pouvoirs et savoirs de l'écrit*. Paris : La Dispute.

GUEDJ, M. & KAHN, P. (2010). L'enseignement scientifique primaire dans les années 1950 : une difficile mutation. *In* D'Enfert, R. & Kahn, P. *En attendant la réforme ; Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la IVe République* (p. 183-198). Grenoble : PUG.

JOIGNEAUX, C. (2015a). Les élèves de maternelle face aux fiches. *In* Bonnéry, S. (dir.). *Supports pédagogiques et inégalités scolaires* (p. 82-108). Paris : La Dispute.

JOIGNEAUX, C. (2015b). La diffusion des fiches à l'école maternelle. *Spirale*, n° 55, 57-66.

KAKPO, S. (2012). *Les devoirs à la maison. Mobilisation et désorientation des familles populaires*. Paris : PUF.

KARA, M. & PRIVAT, J.-M. (dir.) (2006). *Pratiques*, n° 131-132 La littératie. Autour de Jack Goody.

LABORDE-MILAA, I. (2007). La fiche dans les manuels scolaires. Un concentré clair ou opaque du pouvoir auctorial ? *Lidil*, n° 35, 79-97.

LANTHEAUME, F. (2001). Solidité et instabilité du curriculum d'histoire en France. *Éducation et sociétés*, n°8, 125-142.

LAVIEU-GWOZDZ, B. & RICHARD-PRINCIPALLI, P. (2014) Analyse comparative des procédures ponctuationnelles dans trois supports pédagogiques, *Le Français aujourd'hui, 187*, En ligne : http://www.afef.org/blog/post-enseigner-la-ponctuation-n-a87-du-franus-aujourd-hui-p1461-c11.html

MARTINAND, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière*. Berne : Peter Lang.

PAUTAL, E. & SCHNEEBERGER, P. (2015). Des usages des supports scientifiques producteurs d'inégalités. *Spirale*, n° 55, 79-92.

NICLOT D. (2009). Cent ans d'évolution des manuels de géographie pour la classe terminale en France. *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 35, n° 2. p. 129-153.

PLANE, S. (coord.) (1999). *Manuels et enseignement du français*. Caen : CRDP de Basse Normandie.

RENARD, F. (2011). *Les lycéens et la lecture. Entre habitudes et sollicitations*. Rennes : PUR.

RICHARD-BOSSEZ, A. (2016). La fiche à l'école maternelle : un objet littératié paradoxal. *Recherches en éducation*, n° 25, 46-56.

ROCHEX, J.-Y. & CRINON, J. (dir.) (2011). *La construction des inégalités scolaires au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignement*. Rennes : PUR.

SAVATON, P. (2010). L'enseignement des sciences naturelles dans les années 1960 : entre réformes, révolution et reconnaissance. *In* R. D'ENFERT & P. KAHN *Le Temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Ve République* (p. 101-114), Grenoble : PUG.

TRALONGO, S. (2015). Le « Carnet de bord » utilisé en module de professionnalisation en IUT : un outil de cadrage pour le « cheminement » de l'étudiant ? *Spirale*, n° 55, 93-104.

VAQUERO, S. (2016), Raconter le travail scolaire. Effets cognitifs et sociaux de la tenue du carnet de bord de Travaux Personnels Encadrés. *Recherches en éducation*, n° 25, 82-92.

VERDELHAN-BOURGADE, M. (2002). Le manuel comme discours de scolarisation. *ELA*, n° 125, 37-52.

VIGNIER G. (1997) La représentation du savoir : mise en page et mise en texte dans les manuels scolaires. *Les cahiers du français contemporain*, n°4. p. 47-81.

MANUELS SCOLAIRES CITÉS

CLARY, M. & DERMENJIAN, G. (2010). *Histoire, Géographie, histoire des arts, programmes 2008*, Les ateliers Hachette éducation.

GUICHARD, J. (dir.). (2005). *Sciences expérimentales et technologie – cycle 3*, Les ateliers Hachette éducation.

LASALMONIE J. & FOURNIER P. (1958). *Leçons de choses*. Paris : éd. Delagrave.

ROLANDO, J.-M., SIMONIN, G., POMMIER, P. NOMBLOT, J. LASLAZ J.-F. & COMBALUSIER, S. (2003) *Sciences. 64 enquêtes pour comprendre le monde*. Paris : Magnard.

MESURE, MESURAGE ET INCERTITUDES : UNE PROBLEMATIQUE INTER-DIDACTIQUE MATHEMATIQUES / PHYSIQUE

Aurélie **CHESNAIS** et Valérie **MUNIER**

LIRDEF (EA 3749), Université de Montpellier et Université Paul Valéry de Montpellier

aurelie.chesnais@umontpellier.fr et valerie.munier@umontpellier.fr

Résumé

La question de la mesure est incontournable en sciences expérimentales comme en mathématiques. S'y intéresser suppose de distinguer résultat de la mesure et processus de mesurage, ainsi que de tenir compte de la problématique des incertitudes. Or, du point de vue épistémologique, ces différents éléments ne jouent pas toujours le même rôle en mathématiques et en physique, notamment lors des activités de modélisation. Penser les enjeux de l'enseignement de la mesure ne peut donc se faire sans considérer les interactions entre ces deux disciplines.

Après avoir présenté les enjeux épistémologiques et didactiques liés à la mesure et aux incertitudes en mathématiques et en physique, nous analyserons leur prise en charge par les programmes et manuels scolaires, du cycle 3 à la fin du collège. Nous ne visons pas une analyse exhaustive mais tentons de mettre en évidence, sur plusieurs sujets dont nous justifions le choix, les caractéristiques de cette prise en charge et notamment celles dont on peut supposer qu'elles sont susceptibles de générer des difficultés pour les élèves et les enseignants.

Mots clés : Mesure, grandeur, incertitude, inter-didactique mathématiques physique, géométrie, statistique, modélisation

INTRODUCTION

La question de la mesure est cruciale tant en physique qu'en mathématiques. Celle de son enseignement et de son apprentissage est problématique, de l'école primaire à l'université, comme l'illustrent les trois exemples suivants.

Premier exemple : dans le cadre d'une étude sur la transition école-collège, nous avons proposé des tests à des élèves de fin de sixième (Munier et al., 2014). L'une des tâches consistait à leur demander, dans une première question, de construire un angle de 89° ; dans une seconde, ils devaient dire si cet angle est droit et justifier leur réponse. La première tâche est très largement réussie, mais parmi les élèves réussissant cette première tâche, moins de deux tiers répondent correctement à la seconde. Plus d'un élève sur dix justifie sa réponse (qu'elle soit oui ou non) à partir de l'utilisation de l'équerre et 6% des élèves mentionnent la « règle du 1° près[1] » : « je le sais car un angle droit est de 90° et l'angle ABC est de 89°et ce n'est qu'un degré avant ».

[1] Cette « règle », communément établie dans les classes, est liée à l'usage du rapporteur (du fait de sa précision au degré), c'est-à-dire au *mesurage empirique*, nous y revenons plus loin.

Deuxième exemple : dans le cadre du même projet sur la transition école-collège, nous avons pu observer une séance de classe en cinquième en physique, lors de laquelle il s'agit de compléter « l'égalité mystère » : 1L = … dm^3. La tâche proposée aux élèves consiste à mesurer les arêtes d'une brique de lait de 1 litre et d'en calculer le volume par l'application de la formule du volume d'un pavé droit. Le résultat obtenu par les élèves est de 1,026 dm^3. L'enseignant conclut alors, sans discussion : « On est proche de 1, donc ça veut dire que le volume de la brique, il est de 1 dm^3 » (Munier et al., soumis).

Troisième exemple : dans l'article de Jacquier (1995), après que les élèves ont calculé la longueur d'un côté d'un triangle rectangle et trouvé $\sqrt{50}$, elle relève que de nombreux élèves sont gênés par ce résultat (« Il faut écrire BD=7,07 car $\sqrt{50}$, pour une longueur, ça ne veut rien dire »).

Ces trois exemples, qui relèvent de contextes variés (mathématiques et physique, différents domaines des mathématiques – grandeurs et mesures, géométrie, nombres), ont en commun le fait de mettre en évidence des difficultés liées à la mesure et à son rôle, pour les élèves comme pour les enseignants. On peut interpréter la difficulté qui se pose comme celle de traiter l'écart entre une forme de réalité (matérielle) et le modèle, entre l'empirique et le théorique, le mesurage matériel et le travail « abstrait » sur la mesure.

Nous proposons dans la première partie de cet article une étude épistémologique de la mesure et de son rôle en mathématiques et en physique, qui nous permet ensuite d'éclairer les enjeux épistémologiques et didactiques liés à la mesure et aux incertitudes dans ces deux disciplines. Dans la seconde partie, nous analysons leur prise en charge par les programmes et les manuels scolaires, du cycle 3 à la fin du collège. Nous étudions aussi, pour certains thèmes, la manière dont ils sont pris en charge par les travaux de recherche en didactiques. Nous ne visons pas une analyse exhaustive mais nous tentons de mettre en évidence, sur plusieurs sujets dont nous justifierons le choix, les caractéristiques de cette prise en charge et notamment celles dont on peut supposer qu'elles sont susceptibles de générer des difficultés pour les élèves et les enseignants.

ENJEUX EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES LIES A LA MESURE EN MATHEMATIQUES ET EN PHYSIQUE

Etude épistémologique

La mesure en physique

D'un point de vue épistémologique, le physicien cherche à construire un dialogue entre champ empirique et champ théorique, les modèles pouvant être considérés comme des intermédiaires entre ces deux champs. D'après Walliser (1977) il existe deux points de départ possibles pour élaborer un modèle : partir d'un champ théorique et développer un modèle par mise en équation d'un système, ce modèle ayant un caractère hypothétique à confirmer ; ou prendre comme point de départ le champ empirique, domaine de l'expérimentation – dans lequel la mesure joue un rôle central – le traitement des données permettant d'établir un modèle empirique. Tous ces aspects ne sont pas sollicités dans un travail de recherche donné, mais on peut considérer que ce processus de modélisation dans son ensemble est conduit dans un mouvement spiralaire par la communauté scientifique. Nous nous centrerons dans la suite de cette communication sur l'élaboration de modèles à partir du champ empirique.

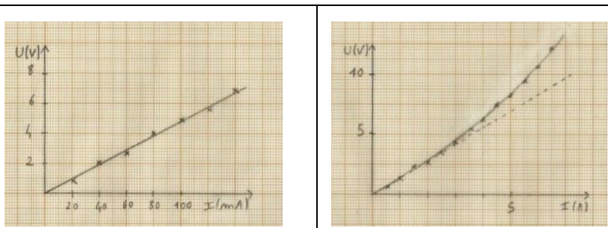
Dans ce cadre, lorsqu'on s'intéresse à la mesure en physique, on doit tenir compte du fait que le terme *mesure* est polysémique. Ainsi, sous ce terme peuvent se cacher d'une part l'opération proprement dite de *mesurage*, d'autre part le résultat de cette opération, c'est-à-dire le nombre obtenu grâce au mesurage, et ces écarts d'acception peuvent être sources de confusions. De plus, considérer un mesurage empirique nécessite de prendre en compte la dispersion et les incertitudes. Rappelons que l'incertitude est un paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande. En effet, dans tout processus de mesurage on est confronté à de la dispersion, c'est-à-dire que si l'on mesure N fois la même grandeur, on n'obtient pas N résultats identiques. Les incertitudes peuvent être liées à des erreurs systématiques et/ou aléatoires, et avoir diverses origines : l'observateur, l'instrument et la grandeur même qui fait l'objet du mesurage. De ce fait, comme le dit Perdijon

> « il ne suffit donc pas d'un nombre pour exprimer la mesure, il en faut deux : l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver, ce qu'on appelle un intervalle de confiance » (Perdijon, 2012).

Dans l'enseignement comme dans la pratique scientifique, les activités faisant appel à la mesure peuvent conduire, entre autres, à tester une hypothèse, déterminer des constantes physiques, établir une loi, explorer le champ de validité d'une théorie, explorer les limites d'un modèle…

La question de la modélisation, de la nature et du rôle des modèles est essentielle en physique, elle se pose aussi bien évidemment en mathématiques et cette question renvoie à la nature de ces disciplines, qu'il s'agisse des modes d'élaboration des connaissances ou de la nature même de ces connaissances. La question de la modélisation est aussi une question cruciale dans l'enseignement.

Quelles que soient les fonctions attribuées au mesurage, les valeurs obtenues doivent être traitées pour donner des informations sur le phénomène ou l'objet étudié : « le traitement de données est en fin de compte la conversion de données en conclusion sur le monde physique » (Maruani, 1996, p. 1440), ce qui nécessite de prendre en compte les incertitudes. Par exemple, si on mesure l'intensité et la tension dans un circuit résistif, on obtient des points qui ne sont pas parfaitement alignés (voir figure 1).



Cas 1 Cas 2

Figure 1 : relation U=f(I) dans un circuit résistif

Dans le premier cas, la loi U=RI (loi d'Ohm) est en général considérée comme un modèle « raisonnable » de la relation qui relie les grandeurs intensité et tension dans ce circuit. Le second cas amène à s'interroger sur la valeur de l'intensité à partir de laquelle cette loi ne peut plus être considérée comme un bon modèle de cette relation, ce qui revient à explorer les limites du modèle. Dans les deux cas on ne peut pas conclure sans une estimation des incertitudes et de l'intervalle de confiance associé.

En outre, au-delà de l'interprétation des résultats d'une expérience, établir des lois physiques suppose de prendre en compte la question de la généralisation : les expériences doivent être répétées, notamment par d'autres équipes de recherche, et il faut explorer les limites des modèles et des lois, ce qui nécessite là encore la prise en compte des incertitudes.

La mesure en mathématiques

Une mesure de grandeurs peut être définie, en mathématiques, comme une application d'un ensemble d'objets, à valeurs dans R+, via l'ensemble des grandeurs (cf. Chevallard et Bosch, 2002, ou encore Perrin, 2011 pour une définition rigoureuse). On parle également de la « mesure de … » pour désigner l'image d'un élément (« la mesure en centimètre de ce segment est 3 », APMEP, 1982). Cependant, comme le note Perrin-Glorian (1989-90), le sens du mot a évolué encore récemment (au cours du XXème siècle). A la fois dans la noosphère et dans le cadre scolaire, les mesures étaient d'abord non dissociées des grandeurs, puis associées à des aspects pratiques, des contextes de la vie courante, avant d'être associées progressivement à des aspects théoriques. Perrin-Glorian note même que le sens du mot ne fait pas encore aujourd'hui totalement consensus. De manière connexe, les grandeurs sont également, à une époque, exclues des mathématiques, en particulier pour le travail sur les nombres, ce que note notamment Lebesgue (cité par Brousseau, 2002). Les programmes scolaires suivent cette tendance, comme le pointent Brousseau (ibid.) et Chevallard et Bosch (2001), excluant également la dimension matérielle de la mesure, ainsi que les pratiques familières associées ou celles issues d'autres sciences.

Du point de vue historique, dans les travaux d'Euclide, la mesure est un rapport entre deux grandeurs (Dhombres, 1978), l'une étant prise pour référence. Aujourd'hui, les deux concepts peuvent être définis l'un par rapport à l'autre (Chevallard et Bosch, 2002, Perrin, ibid., …) : un point de vue est de définir une fonction mesure, puis une grandeur comme classe d'équivalence de cette fonction ; à l'inverse, on peut définir la mesure comme quantification des grandeurs et résultat d'un processus de « mesurage » (appelé aussi « procédé de mesure », « opération pratique de mensuration » (Rogalski, 1979, p. 566), « mesure pratique » (Lebesgue, 1975, p. 28) : la mesure est alors le rapport entre la grandeur mesurée et la grandeur choisie comme étalon (ou encore le nombre de reports de l'étalon nécessaire pour « couvrir » la grandeur : Chevallard et Chambris (2015) parlent ainsi de « nombrement »).

Notons que, même dans cette dernière définition, la mesure comme le mesurage restent « théoriques » : la question des aspects matériels ne relève pas des mathématiques et les aléas liés à ces aspects sont considérés comme un « bruit » (Houdement et Kuzniak, 2002), le plus souvent ignoré (on n'en trouve aucune mention dans la plupart des travaux de mathématiciens qui évoquent la question de l'enseignement de la mesure comme, Lebesgue (ibid.) Perrin (ibid.), …). Dans la brochure APMEP des années 80 (ibid.), qui a fait longtemps référence dans le monde de l'enseignement, les incertitudes sont mentionnées[2] (p. 15) mais il n'y est plus jamais fait référence dans la suite de la brochure. Rouche (2006) insiste sur la différence entre les aspects matériels et théoriques en mathématiques à l'école (par exemple pour les fractions, sur le partage des tartes), mais n'en déduit pas explicitement des spécificités pour ce qui concerne la mesure. Les conséquences sont que tout mesurage est considéré comme « tombant juste » (« en supposant […] que l'opération se fait exactement », Chevallard et Chambris, ibid.), sans incertitude, ce qui suppose une infinie précision (la possibilité de répéter infiniment des étapes[3]). Or, le fait qu'une mesure théorique n'est pas accessible par mesurage peut servir de support à de nouvelles questions théoriques en mathématiques, en particulier à propos des

[2] Il est précisé que : « l'imperfection […] des procédés physiques d'évaluation d'une grandeur fait qu'un mesurage est nécessairement approximatif : il convient donc de fournir une autre information, appelée incertitude, sur la plus ou moins bonne qualité du mesurage. »

[3] Ce qui contribue d'ailleurs à la difficulté de conceptualisation des nombres associés (Lebesgue, ibid.).

nombres : notamment celle de l'existence des nombres rationnels puis irrationnels (cf. la question de l'incommensurabilité), en lien avec la question des approximations (et le calcul infinitésimal), mais cela ne prend pas en compte les problématiques liées au caractère aléatoire de la mesure.

La mesure au croisement des mathématiques et de la physique

Ainsi, en mathématiques comme en physique, mesure et mesurage renvoient à de multiples objets. La mesure désigne parfois une fonction, un nombre, un nombre avec une unité ou encore un processus pratique ; le mesurage recouvre tantôt les aspects théoriques du procédé qui permet d'obtenir une mesure, tantôt sa mise en œuvre pratique, matérielle.

De ce fait, nous distinguons deux aspects du concept de mesure : on parlera ainsi de

- La mesure *théorique*, au sens mathématique, qui correspond à une mesure exacte de grandeur « idéale ». Celle-ci renvoie à des objets mathématiques élaborés, en lien avec la construction des nombres, jusqu'à la théorie de la mesure.
- La mesure *empirique*, qui renvoie à des pratiques matérielles, éventuellement familières, dans d'autres disciplines ou dans la classe de mathématiques. Celle-ci est en lien avec la modélisation et les mathématiques appliquées.

De la même manière, nous distinguons le mesurage théorique (qui « tombe juste », notamment) et le mesurage empirique.
Notons que cette distinction (ou des distinctions proches) a déjà été mentionnée par plusieurs auteurs, sous différentes terminologies (Capponi (1988), Tanguay et al. (2014), Rogalski (op. cité), etc.) : « mesure effectuée/mesure calculée », « procédé pratique de mensuration », « mesures déduites et mesures déterminées aux instruments ».

La question du statut de ces deux aspects et de leur articulation n'est pas la même dans les deux disciplines. En mathématiques, seule la mesure théorique est reconnue et une question didactique naît du fait que l'enseignement de la mesure théorique s'appuie sur la pratique de la mesure empirique. En physique, hormis dans le cas de la physique théorique où les questions se posent d'une autre manière, le travail sur les modèles empiriques s'appuie sur des mesures empiriques. Ainsi, la question de la précision et de la dispersion ne se pose pas de la même façon. Il s'agit là de différences épistémologiques importantes entre les disciplines, qui amènent à s'interroger sur les enjeux d'enseignement associés. Comme nous le montrons dans la suite, ces derniers relèvent à la fois de l'aspect théorique et de l'aspect empirique de la mesure, parfois séparément et parfois dans la confrontation des deux.

Synthèse de la littérature

Les travaux de didactique des mathématiques

Les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage en mathématiques autour de la mesure ont varié selon les époques, en lien avec l'évolution notamment de la signification de ces mots en mathématiques, comme en témoignent Perrin-Glorian (1989-90), Chambris (2008) et Brousseau (2002). D'enjeux pratiques liés à des savoirs familiers relégués en périphérie des mathématiques au travail sur la mesure comme moyen du travail sur les grandeurs, enfin au travail sur la mesure comme support du travail sur les nombres.

La XIème école d'été de didactique des mathématiques, en 2001, dont le thème est « grandeurs et mesure » correspond à l'étape intermédiaire : les travaux présentés portent essentiellement sur les grandeurs, la mesure n'étant vue qu'à propos de la mesure de grandeurs données, moyen de travail sur les grandeurs. On note toutefois une exception : l'un des cours (celui de Nota,

2002) porte sur la mesure, mais il s'agit de la mesure en physique. Le texte du cours de Brousseau (ibid.), précise également que « les questions de métrologie et d'unités sortent du domaine des mathématiques » (p. 37) et que « les connaissances correspondantes [aux domaines des grandeurs et mesures] n'ont cessé d'être de plus en plus dispersées dans des domaines de référence différents. » (p. 36) Il affirme à cette occasion la nécessité de les penser au sein de l'enseignement des mathématiques. Mais une relecture de son texte à la lumière des éléments pointés dans la première partie montre qu'il s'agit essentiellement des enjeux théoriques sur la mesure (sens de la mesure, de l'unité etc.). La CORFEM de 2011 s'inscrit également dans cette démarche, portant sur les grandeurs, mais ne mentionnant que très peu la mesure.

Les travaux plus récents, notamment Chevallard et Bosch (2001, 2002) ou plus récemment la thèse de Chambris (2008) s'intéressent à la mesure pour d'autres aspects que son rôle dans la conceptualisation des grandeurs. Il s'agit de travaux essentiellement théoriques qui s'intéressent aux aspects théoriques de la mesure, notamment en lien avec la construction des nombres.

La question de la variabilité de la mesure (empirique) et des incertitudes, considérée comme ne faisant pas partie du champ des mathématiques, n'est donc pas abordée par la didactique des mathématiques. Les seuls travaux qui la mentionnent sont ceux qui s'en servent comme support de travail sur les notions statistiques, les séries de mesures (issues de disciplines expérimentales) constituant de « bonnes » séries de nombres pour étudier divers indicateurs de position et de dispersion. Chevallard et Wozniak (2003) citent ainsi la dispersion des mesures [empiriques] comme un exemple « paradigmatique en statistique » de phénomène de variabilité.

Toutefois, la question des valeurs approchées et approximations présente a priori des relations avec les questions qui nous préoccupent dans cet article. Ce sujet relève des mathématiques et fait l'objet de quelques travaux de didactique (notamment Birebent (2001), ainsi que Bronner, 1997). Toutefois, il faut distinguer la question de l'approximation dans le calcul d'une part et dans la mesure d'autre part, or il apparaît que la seconde – celle qui nous intéresse ici – est encore plus mal prise en charge (Tanguay et al., 2014). Dans les deux cas, on parlera d' « erreurs », d'écart à une valeur exacte, mais il nous semble que la question des incertitudes de mesure et des rapports entre mesure théorique et mesure empirique (cf. supra) n'est pas réductible à la celle du rapport entre valeur approchée et valeur exacte, notamment dans l'enseignement. Par ailleurs, comme le pointe Lebesgue (1975), cette question se pose différemment selon la nature des nombres.

En effet, si l'on peut considérer qu'une mesure théorique est par définition exacte, tandis qu'une mesure empirique est nécessairement approchée, il est quasiment systématique, dans les classes, de considérer que si l'extrémité d'un segment semble tomber « sur » la graduation de la règle[4], alors la valeur obtenue est précise (exacte), alors que si l'extrémité tombe entre deux graduations, la valeur est considérée comme approchée. Il va ainsi sembler naturel, si la mesure obtenue par mesurage est un nombre entier, de considérer qu'alors elle est exacte – ou du moins de « faire comme si ». Lorsque la mesure théorique est irrationnelle (notamment la longueur d'un cercle de rayon décimal), en revanche, le résultat obtenu (après par exemple mesurage du rayon avec la règle et calcul) sera présenté comme exact s'il est donné avec Pi dans la formulation et approché si une valeur décimale est donnée. Or du point de vue mathématique, la longueur d'un segment étant un nombre réel, elle n'est par nature pas accessible par

[4] Nous mentionnons ici un exemple lié à des mesures de longueurs, mais le même exemple peut être développé à propos de la mesure des angles avec le rapporteur, voire à celle des aires avec un quadrillage.

mesurage. Il nous semble ici que les enjeux liés à la nature empirique / théorique des mesures et des objets considérés sont brouillés.

Un autre exemple de ce « brouillage » est qu'une préconisation faite aux élèves à partir du cours moyen est d'utiliser préférentiellement le compas plutôt que la mesure à la règle pour reporter des longueurs. L'argument fréquemment employé pour justifier cette exigence est celui d'une plus grande précision. Or, si l'usage du compas peut en effet faire éviter des erreurs de lecture sur la règle, il est à notre avis loin de garantir que la longueur du nouveau segment sera plus proche de celle du premier : les contraintes matérielles de manipulation du compas sont telles que son usage par les jeunes élèves est au moins aussi problématique que celui de la règle. Là encore, il s'agit selon nous d'un amalgame : l'enjeu de l'utilisation du compas pour le report de mesure n'est pas celui de la précision dans le cadre d'une manipulation matérielle, mais de traiter des grandeurs indépendamment de leur mesure. Il s'agit là d'enjeux non plus de construction mais de constructibilité, pour lesquels les mesures – quand elles sont mobilisées – sont théoriques.

Nous défendons donc ici la pertinence d'une approche des questions d'enseignement et d'apprentissage de la mesure fondée sur la distinction entre mesure théorique et mesure empirique, distinction peu identifiée en tant que telle par la didactique des mathématiques.

Les travaux de didactique de la physique

Dans les travaux de didactique de la physique, la question de la mesure en tant que telle est également peu abordée. Séré a étudié l'évolution de l'enseignement de la mesure depuis le début du 20ème siècle (Séré, 2007, 2008), évolution qui a suivi l'évolution de la métrologie. Elle montre que, durant la première moitié du vingtième siècle, le mesurage a été enseigné en tant que savoir-faire, les mesures étant peu (ou pas) utilisées, mais qu'une centration s'est faite ensuite progressivement sur le traitement des données et sur l'évaluation de la qualité de la mesure, en lien avec les théories statistiques. Elle pointe que cette évolution des pratiques et des enjeux du mesurage est liée également aux fonctions, aux buts attribués aux activités expérimentales, qui ont considérablement évolué avec le passage d'un enseignement basé sur la monstration et l'induction à un enseignement basé sur une démarche d'investigation.

La plupart des études sur la mesure et les incertitudes se sont focalisées sur les raisonnements des élèves et étudiants (Lubben et Millar, 1996, Volkwyn et al., 2004, Maisch et al., 2008). Ces travaux ont proposé différentes catégorisations des raisonnements et montrent que les élèves ne disposent que de très peu des outils conceptuels permettant de raisonner sur la dispersion des résultats de mesure (Séré et al., 2001).

Quelques études se sont intéressées à la prise en compte de la mesure dans l'enseignement de la physique. Ces études montrent que les questions de variabilité et d'incertitudes sont peu prises en charge dans l'enseignement. Séré pointe notamment chez les enseignants *« une résistance certaine à aborder avec leurs élèves le problème des incertitudes »* (Séré et al., 1998), notamment par crainte que les élèves deviennent sceptiques vis-à-vis de l'expérience. Nous reviendrons sur cette question des réticences des enseignants à aborder ces questions dans la discussion.

Les enjeux d'apprentissage liés à la mesure

Ces analyses nous permettent de dégager les enjeux d'apprentissage majeurs liés à la mesure pour l'enseignement obligatoire. Certains de ces enjeux relèvent de la mesure théorique, d'autres de la mesure empirique, d'autres enfin des rapports entre les deux.

Les enjeux liés à la mesure théorique sont : la notion d'unité, le sens de la mesure comme report d'unité versus repérage, les notions de multiples et sous-multiples de l'unité. Les enjeux liés à la mesure empirique sont : l'usage des instruments, la connaissance des unités conventionnelles, les questions de dispersion et d'incertitudes. Quant à la distinction et à l'articulation des deux, il s'agit pour les élèves d'apprendre à distinguer les situations dans lesquelles chacune est pertinente : par exemple, savoir qu'une conjecture en géométrie peut s'appuyer sur des mesures empiriques, mais que la démonstration porte sur les mesures théoriques. L'un des enjeux est aussi de résoudre la contradiction apparente entre le fait que, lorsqu'on fixe une unité, il y a unicité de la mesure théorique, tandis que les mesures empiriques sont sujettes à dispersion.

Au-delà des concepts, nous identifions des enjeux d'ordre épistémologique plus généraux : un travail sur la dispersion des résultats de mesure peut permettre de dépasser la « résistance » et le « déni » de la variabilité du monde pointés par Chevallard et Wozniak (2003, p. 22), en développant un « regard statistique sur le monde », essentiel à l'exercice de la citoyenneté (ibid. p. 24). Il s'agit enfin selon nous également d'un levier potentiel pour travailler sur la nature de l'activité scientifique, sur la notion de modèle et notamment la distinction entre modèle et réalité.

Problématique

Notre problématique est ainsi la suivante : Comment sont pris en charge dans l'enseignement ces enjeux ? Nous nous intéressons à la fois aux enjeux liés à la mesure empirique et à la mesure théorique, ainsi qu'à la question de leur articulation. Nous étudions notamment la manière dont est pris en charge dans l'enseignement le fait que le travail sur les enjeux théoriques s'appuie sur la pratique du mesurage empirique et la façon dont est gérée dans l'enseignement la distinction entre nature empirique et théorique des mesures. L'articulation des deux sert-elle des enjeux dans d'autres domaines (géométrie, nombres) ? Quels problèmes peut poser la cohabitation des deux dans la classe ?

ETUDE EXPERIMENTALE EXPLORATOIRE

Nous proposons dans cette partie nos résultats concernant la prise en charge de ces enjeux d'enseignement. Nos recherches s'articulent sur trois axes, chacun pouvant a priori constituer une « niche écologique » (Artaud, 1997) pour les objets qui nous intéressent. Nous avons ainsi exploré tout d'abord la mesure de certaines grandeurs, en mathématiques et en physique, puis les domaines géométrie et statistique, enfin les activités de modélisation en mathématiques et en physique. Nous étudions différents types de données : travaux de recherche en didactiques, textes officiels et manuels scolaires. Ces derniers sont étudiés pour leur potentiel à donner une première approximation de ce qu'il se passe dans les classes.

Pour chaque axe, nous présentons une analyse a priori et les critères d'analyse qui en découlent puis nous justifions les objets d'étude retenus, enfin, nous exposons les résultats.

Axe 1 : l'enseignement de la mesure de certaines grandeurs

Critères d'analyse

Au-delà des enjeux d'apprentissage liés aux grandeurs elles-mêmes, nous avons recherché comment étaient pris en charge les enjeux d'apprentissage liés à la mesure cités plus haut.

D'une part les enjeux autour de la mesure théorique : le sens de la mesure (unité, linéarité, mesure comme repérage et/ou quantité d'unités (cf. Bessot et Eberhard (1983) pour des précisions concernant cette distinction, à propos des longueurs), les notions de multiples et sous-multiples de l'unité, unités arbitraires vs conventionnelles, conversions etc. D'autre part les enjeux autour de la mesure empirique : méthodes de dénombrement des unités (report) / de repérage, autour des instruments de mesure (maîtrise des instruments conventionnels, méthodes de mesurage[5]), notions de dispersion et d'incertitude, causes de dispersion, intervalle de confiance. Enfin, les enjeux liés à l'articulation des deux : articulation du sens de la mesure avec la mesure empirique, la notion de « précision » en lien avec la nature des nombres ; il s'agit notamment d'identifier la façon dont est prise en charge l'apparente contradiction entre l'unicité de la mesure (théorique) d'une grandeur, une unité étant fixée, et la dispersion des mesures (empiriques).

Objets d'étude

Ne pouvant couvrir toutes les grandeurs, en mathématiques notre choix s'est porté en priorité[6] sur la mesure des longueurs au cycle 2 – comme première[7] grandeur introduite à l'école -, la mesure des masses au cycle 2 – qui nous semblait intéressante car elle est travaillée à la fois en mathématiques et en physique – enfin la mesure des angles en sixième, parce que cette grandeur a pour particularité d'être introduite à l'école primaire mais sa mesure seulement au collège. En physique, nous avons retenu la mesure des masses et volumes en cinquième et la mesure des grandeurs électriques en quatrième.

Les travaux de didactique des mathématiques

L'évolution des préoccupations des recherches en didactique est concomitante avec l'évolution des curriculums et des savoirs eux-mêmes. Comme évoqué dans la première partie, les travaux de didactique des mathématiques s'intéressant au domaine grandeurs et mesures (notamment les travaux des années quatre-vingts, jusqu'à la XIème école d'été de didactique des mathématiques en 2001 et le colloque de la CORFEM en 2011), portent essentiellement sur la construction des grandeurs.

Les questions qui nous intéressent ici n'apparaissent jamais comme objet d'étude en tant que tel dans les travaux de recherche. Toutefois, les recherches qui portent sur la construction des grandeurs incluent une dimension expérimentale (beaucoup des travaux des années quatre-vingts proposent des ingénieries didactiques : Bessot et Eberhard 1983, Douady et Perrin-Glorian 1983, Vergnaud 1983, Brousseau et Brousseau 1991 par exemples). Or, on peut supposer que les enjeux pointés ci-dessus, notamment liés à la mesure empirique et aux incertitudes, même s'ils ne constituent pas des objets de recherche ou d'enseignement dans les ingénieries, ne peuvent manquer d'apparaître.

Si l'on étudie ainsi la prise en charge de ces enjeux dans ces travaux, il apparaît que les enjeux d'apprentissage liés à la mesure et qui sont explicitement pris en charge sont essentiellement liés à ses aspects théoriques, même lorsque, comme Bessot et Eberhard (1983), ils affichent de s'intéresser à la « mesure effectuée » et non à la « mesure calculée ». Les ingénieries proposées

[5] Nous entendons là par exemple le mesurage d'un volume par immersion, le fait de tarer une balance etc.

[6] Même s'il aurait semblé pertinent d'étudier aussi la mesure des aires (qui présente la particularité d'être la première grandeur composée, et pour laquelle il n'y a pas d'instrument permettant de trouver la mesure directement), ainsi que la mesure des volumes (pour la comparaison entre mathématiques et physique et parce qu'elle présente des spécificités (Rogalski, 1979)

[7] Nous excluons de fait la grandeur « quantité dans une collection discrète », qui est réellement la première grandeur mesurée, car cette grandeur fait figure de cas très particulier par rapport aux enjeux qui nous intéressent.

s’appuient en revanche largement sur des situations impliquant du mesurage empirique (report de bandes unités par exemple dans Bessot et Eberhard (ibid.), découpages et recollements ou pavages (en 2D ou 3D) dans les travaux de Douady et Perrin-Glorian (1983), etc.). Les questions liées à la précision et aux approximations sont utilisées comme levier pour introduire l’idée de fractionnement de l’unité ou introduire des nombres non entiers mais elles ne reposent pas sur les incertitudes de mesure. Ces dernières soit sont évacuées, soit restent un « bruit ». Ainsi, elles sont parfois « gommées », comme dans le travail de Douady et Perrin-Glorian (ibid.) qui précisent que,

> « aux erreurs de mesure près, les deux méthodes doivent donner le même résultat. Les pièces ont été choisies pour que ce soit effectivement le cas, sans être gêné par les erreurs de mesure. » (p. 45).

Parfois, elles sont considérées comme produisant des « erreurs » qui servent de levier pour valider ou invalider une procédure (notamment dans Bessot et Eberhard, ibid.).

Le travail de Brousseau et Brousseau (1991) sur la masse fait une place plus importante à ces questions : les incertitudes liées au mesurage matériel sont pointées comme inévitables et comme devant être prises en charge, mais la notion d’incertitude ou le rapport entre mesurage empirique et théorique ne constituent pas pour autant des enjeux d’apprentissage spécifiques des situations proposées.

Les textes officiels

Dans les programmes en vigueur (MEN, 2008a et 2008b), les enjeux autour de la mesure théorique sont pris en charge : il est fait mention des étapes de construction de la mesure des grandeurs, du report d’étalon etc., cependant il y a ensuite une centration rapide sur les enjeux liés aux unités conventionnelles, aux conversions et aux formules. En ce qui concerne les enjeux liés à la mesure empirique, il est fait mention pour toutes les grandeurs de la maîtrise d’instruments, en mathématiques comme en physique.

En ce qui concerne les enjeux liés à la précision et à la dispersion, ils sont affichés fortement dans le socle commun (MEN, 2006) : à l’issue de la scolarité obligatoire les élèves doivent être capables « d’effectuer des mesures à l’aide d’instruments, en prenant en compte l’incertitude liée au mesurage ». Au collège les instructions précisent que les enseignants de mathématiques et de physique doivent s’associer pour développer chez les élèves un « Mode de pensée statistique dans le regard scientifique sur le monde ». Ils doivent en particulier confronter les élèves au problème de la variabilité de la mesure :

> « De nombreuses activités doivent intégrer la notion d’incertitude dans l’acte de mesurer et développer l’analyse des séries de mesures. […] Plusieurs mesures indépendantes d’une même grandeur permettent ainsi la mise en évidence de la dispersion naturelle des mesures. » (Thème de convergence 1, MEN, 2008b).

Cependant ces objectifs sont peu déclinés dans les détails des programmes.

En revanche ces questions sont abordées dans différents documents d’accompagnement des programmes. Ceux des programmes de l’école de 2002 (MEN, 2002) affichaient des objectifs très ambitieux

> « Une réflexion sur la précision des mesures sera menée à l’occasion de chaque activité. […] Faire prendre conscience des approximations liées à la taille des objets, à la précision des instruments et à leur utilisation. Souvent, cela se traduit par un **intervalle de confiance**, une erreur maximum. Par exemple, pour le mesurage d’un segment dont la longueur prévue

est 4,8 cm, les longueurs de 4,7 cm, 4,8 cm et 4,9 cm sont jugées acceptables. ».

Chevallard et Wozniak (ibid.) pointent par ailleurs que, dans l'ancien document d'accompagnement des programmes de mathématiques, il est pointé que « la distinction entre " mesure exacte " (…) et " mesure approchée "[8] est une question très difficile ».

En physique-chimie, les documents d'accompagnement des programmes en vigueur (MEN, 2008b) consacrent plusieurs pages au thème des erreurs et incertitudes.

Même si nous nous limitons ici à l'école élémentaire et au collège, nous ne pouvons pas ne pas mentionner le document d'accompagnement « mesure et incertitudes » paru en 2012 et destiné aux professeurs de lycée des deux disciplines. Ce long document (une quarantaine de pages) est une clarification disciplinaire et épistémologique des concepts liés à la mesure pour ces enseignants. Notons qu'il ne propose aucune piste de réflexion sur la manière d'aborder ces questions en classe.

Dans les nouveaux programmes de cycles 3 et 4, en vigueur à la rentrée 2016, si les enjeux liés à la mesure théorique sont renforcés, en revanche ceux liés à la mesure empirique, en particulier les questions de précision, sont nettement moins présents, voire quasiment inexistants.

Les manuels

Nous avons étudié 6 à 8 manuels selon les notions, parmi les plus courants.

Concernant la construction du sens de la mesure en mathématiques, on constate que cet enjeu, s'il est plutôt bien pris en charge pour les longueurs, avec des activités utilisant des étalons arbitraires (report de bandes de papier etc.), est peu pris en charge pour la masse, grandeur pour laquelle le travail sur le sens de l'unité, le sens de la mesure comme report et la mesure avec étalon arbitraire sont absents de la plupart des manuels étudiés. En ce qui concerne les angles, cet enjeu est inégalement pris en charge. Deux manuels sur six proposent des activités utilisant des reports d'étalons (plus ou moins arbitraires).

En ce qui concerne la construction du sens de la mesure en physique, lors du travail sur les masses et les volumes en 5ème, on observe très peu de prise en charge (seul 1 manuel fait compter des sucres comme étalons arbitraires pour mesurer des volumes). Pour les grandeurs électriques étudiées, cela n'a pas de sens d'étudier le sens de la mesure en termes de report d'unités ou d'unité arbitraire.

Si l'on se penche sur la nature des nombres en jeu dans les activités ou exercices proposés, on constate que les mesures sont essentiellement entières. Seuls deux manuels sur les angles utilisent des valeurs décimales, à une voire deux décimales, pour des raisonnements sur les mesures théoriques, dont un qui utilise des valeurs à deux décimales dans un logiciel mais parle de « valeur atteinte exactement ».

En ce qui concerne la dispersion et les incertitudes en mathématiques, concernant les longueurs et les masses, les manuels ne les prennent pas en compte. Pour les angles, aucun manuel ne prend en charge la question de la précision du rapporteur. Quelle que soit la grandeur, aucun manuel ne prend en charge la distinction mesure empirique / théorique. Un seul manuel fait figure d'exception, le manuel Phare 2005, en identifiant explicitement qu'une mesure empirique est nécessairement approchée (cf. la remarque de la partie « leçon »).

[8] Notons qu'il s'agit de la question de l'approximation et non du rapport entre empirique et théorique, mais il nous semble qu'il y a ici un large recoupement (cf. supra).

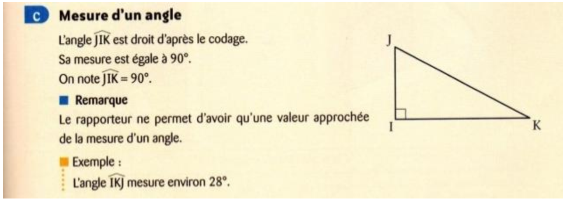


Figure 2 : extrait de manuel prenant en charge le caractère approché de la mesure empirique des angles

En physique, aucun manuel ne prend en charge la question des incertitudes liées à l'instrument lors de l'introduction de la balance, de l'éprouvette graduée ou du multimètre. Le travail sur les causes de dispersion est quasi inexistant. Nous avons relevé, sur l'ensemble des manuels étudiés, un seul exercice sur la balance et deux exercices pour les grandeurs électriques qui prennent en compte ces questions. Deux manuels évoquent les incertitudes dans des « fiches méthodes » sur la mesure mais qui figurent en fin de manuel et il n'y est pas ou peu fait référence dans le reste du manuel. Les élèves ne sont jamais confrontés à N mesures de la même grandeur sauf dans deux exercices sur l'ensemble des chapitres concernés. La précision des mesures n'est abordée que lorsqu'il s'agit de choisir les calibres les mieux adaptés mais essentiellement de manière technique.

Conclusion sur la mesure de certaines grandeurs

Pour conclure en ce qui concerne la mesure de certaines grandeurs, le sens de la mesure est une question travaillée par la didactique des mathématiques, mais de manière inégale selon les manuels et les grandeurs.

En mathématiques, en ce qui concerne le rapport entre mesure empirique et mesure théorique, la distinction entre les deux n'est pas prise en charge dans les travaux de didactique des mathématiques. Elle n'est pas non plus identifiée dans les manuels (sauf dans un manuel dans le chapitre sur les angles). La question de la précision est utilisée pour travailler les sous-multiples de l'unité, mais pas en lien avec les incertitudes de mesure. On peut donc considérer que la question des incertitudes de mesure est très peu prise en charge, même en physique.

Axe 2 : le rôle de la mesure dans d'autres domaines, en classe de mathématiques

La question de la mesure entretient des rapports avec divers domaines en mathématiques. Nous avons choisi dans cet article d'étudier la manière dont les enjeux d'apprentissage identifiés dans la première partie s'insèrent dans deux de ces domaines : la géométrie et la statistique.

Mesure et géométrie[9]

S'intéresser au domaine de la géométrie nous semble pertinent dans la mesure où la géométrie « à la Euclide » (Robert, 2003), visée dans le secondaire, implique beaucoup les relations entre grandeurs qui peuvent, de fait, se traduire par des relations entre leurs mesures (grâce aux nombres réels, même si c'est parfois de manière abusive, Lebesgue, 1975). Ainsi, « la mesure apparaît en filigrane de la géométrie enseignée » (Houdement et Kuzniak, 2001).

[9] Nous ne nous intéressons pas ici à la question de la « géométrie approchée » (Houdement et Kuzniak, 2001), qui ne relève pas tout à fait des mêmes questions que celles traitées dans cet article.

Houdement et Kuzniak (2000) ont identifié que cohabitent dans l'enseignement obligatoire de la géométrie deux paradigmes : la géométrie naturelle (G1) et la géométrie axiomatique naturelle (G2)[10].

G1 et G2 se distinguent par leur rapport au réel. Les objets de G1 sont ainsi des objets concrets, physiques (les dessins, au sens de Parzysz, 1988, ou Laborde et Capponi, 1994), tandis que les objets de G2 sont des objets idéels (les figures). Les mesures des *dessins* sont par nature empiriques et, de ce fait,

> « La Géométrie 1 offre une place licite au mesurage, reconnaît les problèmes d'approximation et étudie la validité de cette approximation » (Houdement 2007, p. 82)

Les mesures des *figures* sont, elles, théoriques. Ainsi, comme le dit Houdement (2007), « La Géométrie 1 ressemble fort à une approche physique des phénomènes, alors que la Géométrie 2 exacerbe les aspects théoriques » (p. 77). Mais les mesures empiriques ne disparaissent pas dans la pratique de G2 : leur rôle change, passant d'outil de validation à outil heuristique, illégitime pour la validation.

Les objectifs de l'enseignement de la géométrie s'inscrivent pour une part dans l'un des deux paradigmes (par exemple, la maîtrise de l'équerre pour vérifier si un angle est droit relève de la géométrie 1, tandis que la capacité à utiliser le théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle relève de G2), pour une autre part dans la mise en cohérence des deux paradigmes en vue d'une pratique de G2 outillée par G1. Notons qu'Houdement (2007) pointe la prise en charge insuffisante des enjeux liés à G1 dans l'enseignement obligatoire. Par ailleurs, Houdement et Kuzniak (ibid.) montrent que l'articulation des deux paradigmes n'est pas bien maîtrisée par les élèves, ni par les étudiants au CRPE. Cela nous amène à nous intéresser au travail de cette articulation, notamment l'introduction de premières tâches relevant de G2, ainsi qu'au moment de travail de l'articulation des deux paradigmes dans la pratique de G2, mais nous présentons les résultats afférents à ce deuxième volet plus loin, dans la partie concernant la modélisation, en lien avec la question de la modélisation en physique.

Les travaux de didactique sur les paradigmes reconnaissent l'importance des questions liées à la mesure : Kuzniak (2010) l'identifie ainsi comme jouant un rôle dans les diverses genèses. Mais les difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la géométrie en lien avec la mesure sont interprétées comme le résultat d'une perturbation liée à l'approximation *du point de vue numérique* (Houdement et Kuzniak, 2003). Notre hypothèse majeure est qu'au-delà de la question du numérique, se pose un problème propre au « monde géométrique » (ibid.), lié à la différence entre mesure empirique et mesure théorique, constitutive du changement d'objets entre G1 et G2. Ce point de vue nous semble notamment éclairer les exemples cités en introduction de ce texte.

Nous étudions dans cette partie la prise en charge des enjeux concernant la mesure tout d'abord en sixième à propos de l'introduction de premières tâches relevant de G2, dans le chapitre sur les angles. Le choix de cette notion est lié au fait qu'y sont associés en sixième des enjeux relevant à la fois de G1 (savoir utiliser un rapporteur) et de G2 (ce chapitre s'inscrit dans les objectifs d'initiation au raisonnement sur les propriétés des figures).

D'après Houdement (2007), l'introduction de tâches relevant de G2 peut être motivée par un enjeu de précision qui suppose que « cette précision doit alors être demandée et aussi précisée pour les mesures de départ » (p. 77). Elle peut également être motivée par un enjeu de

[10] Le paradigme de la géométrie 3 est quasiment absent de l'enseignement secondaire (ibid.).

généralisation, du fait que la résolution dans G2 permet de traiter une classe de problèmes, mais l'économie n'apparaît pas si le problème reste « local » (ibid.).

Nous nous sommes donc attachées à trois critères :

- nous avons identifié si, dans les tâches proposées, les objectifs étaient clairement associés à la mesure empirique (comme mesurer ou construire un angle avec un rapporteur) ou à la mesure théorique (calculer des mesures d'angles en s'appuyant sur des propriétés, justifier un énoncé en s'appuyant sur un calcul etc.) ou si les objectifs étaient mélangés.
- nous avons repéré la présence ou non de tâches propres à motiver l'introduction de la mesure théorique, par exemple en montrant la limite de la mesure empirique pour certaines problématiques (généralisation, précision)
- Enfin, nous avons identifié la nature des nombres en jeu (entiers ou non) en lien avec la nature des mesures (empiriques ou théoriques), puisque le croisement avec le caractère approché ou non de ces mesures nous semble porteur potentiellement d'un brouillage (cf. supra)

En ce qui concerne les résultats, les programmes du collège pointent comme enjeu majeur de la géométrie le « passage du dessin à la figure ». Par ailleurs, le document d'accompagnement sur la géométrie (MEN, 2007) insiste sur l'enjeu de passage « d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique » et certains obstacles sont pointés :

> « Le premier obstacle rencontré en 6ème (et qui perdure longtemps !) est la compréhension du changement de contrat accompagnant le changement de statut des figures. Il ne suffit plus d'observer ou de mettre en évidence à l'aide des instruments des propriétés sur une figure pour qu'elles soient avérées sur le plan mathématique. »

Si l'insuffisance de la validation par les instruments dans la géométrie 2 est pointée, il n'est fait aucune mention explicite des questions liées à la mesure associées à ces changements.

Nous avons étudié six manuels de sixième. Tous réunissent dans un même chapitre les enjeux relevant de G1 (liés à la mesure empirique) et ceux relevant de G2 (liés à la mesure théorique). On trouve dans chaque manuel environ un dixième de tâches portant sur les mesures théoriques (il s'agit essentiellement de tâches où il s'agit de calculer la mesure d'un angle), sauf dans un manuel qui en contient environ un cinquième. Ces tâches sont souvent identifiées comme plus difficiles par les manuels (marquées par des * ou bien identifiées comme des « problèmes » au-delà des exercices d'entrainement). Par ailleurs, elles sont plus ou moins identifiées comme un type de tâches à part : très clairement dans un manuel, pas du tout dans un autre et partiellement dans les quatre derniers.

Du point de vue de la clarification du contrat dans les tâches proposées, nous avons relevé que certains manuels jouent sur les termes employés dans les consignes, distinguant les tâches où il s'agit de « calculer » la mesure d'un angle lorsqu'il s'agit de raisonner sur des mesures théoriques et celles où l'on demande de « donner » la mesure quand il s'agit de mesurer avec le rapporteur – voire il est parfois précisé « mesurer » ou « sans utiliser le rapporteur » etc. Toutefois, un seul manuel explicite ce contrat : « calculer n'est pas la même chose que mesurer, tu ne peux pas utiliser le rapporteur ». On trouve dans cinq manuels sur six des questions que nous qualifions d'ambiguës, du type « quelle est la nature de ... ? », pour lesquelles les auteurs attendent manifestement un calcul sur des mesures théoriques, alors que la réponse peut être obtenue empiriquement. Enfin, dans quatre manuels sur six, sont présents quelques exercices où le contrat change d'une question à l'autre (souvent une construction suivie d'un calcul) sans motivation particulière.

En ce qui concerne la motivation de G2, elle est en général caricaturale, fondée sur l'affirmation qu'un dessin aux instruments n'est « pas suffisamment précis » ou sur le fait que cela permet une économie, mais qui n'est pas motivée et apparaît comme arbitraire (via l'usage des dessins à main levée ou l'interdiction d'utiliser les instruments). Le levier est ainsi essentiellement un « dressage » (Salin, 2003) plutôt qu'une motivation intrinsèque aux mathématiques. Ainsi, l'exemple ci-dessous, qui semble indiquer que validation instrumentée et par le raisonnement sont opposées.

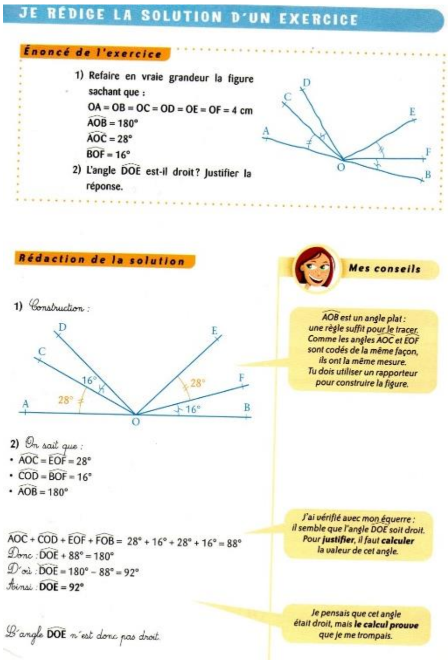
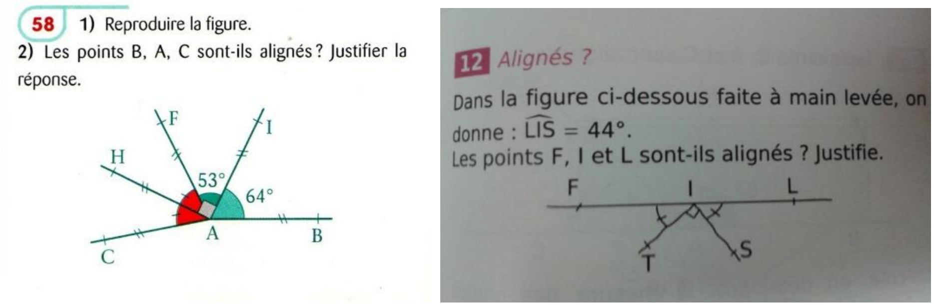


Figure 3 : Extrait de manuel illustrant l'opposition entre validation instrumentée et théorique

Quelques tâches semblent plus porteuses de motivation pour l'introduction de G2, ainsi, dans un manuel, une tâche de travail sur les mesures théoriques (non entières) obtenues en partageant un angle plat ou une tâche sur le calcul de mesures théoriques permettant d'identifier des erreurs dans une construction, mais elles restent très rares.

Certaines tâches nous semblent également potentiellement porteuses, mais sans être probablement pensées comme telles et dont l'exploitation du potentiel dépend fortement du déroulement en classe : ainsi, des tâches incluant un dessin à main levée où il s'agit de conclure par exemple sur le fait qu'un angle est droit ou non et où l'écart est de 1° : on peut penser que tous les élèves ne concluront pas de la même façon à partir d'une construction instrumentée, ce qui peut servir de support à un débat, mais tout dépend si la question est tranchée en termes d' « erreurs » ou permet d'introduire l'idée de mesure théorique. De même des tâches demandant la mesure de l'angle qu'il faudrait ajouter pour obtenir un angle droit ou plat etc. Enfin, certaines tâches partant d'un problème concret ou nécessitant d'établir des conjectures pour obtenir un résultat général nous semblent porteuses pour l'articulation de G1 et G2, mais nous y revenons plus loin.

A l'inverse, certaines tâches nous semblent problématiques, susceptibles de générer des confusions pour les élèves. Notamment des tâches où il s'agit de conclure par le calcul sur une propriété qui est déjà « évidente » sur le dessin (cf. figure 4a) ou qui contredit fortement le dessin, lorsqu'il est à main levée (cf. Figure 4b) (notons que Coppé et al. (2005) ont déjà pointé les difficultés potentielles posées par l'utilisation de ce type de dessin).


58 1) Reproduire la figure.
2) Les points B, A, C sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

12 Alignés ?
Dans la figure ci-dessous faite à main levée, on donne : $\widehat{LIS} = 44°$.
Les points F, I et L sont-ils alignés ? Justifie.

Figure 4 a et b : Exercices problématiques

Enfin, l'usage du mot « mesure » de façon indifférenciée pour désigner des mesures empiriques ou théoriques nous semble problématique, comme cela apparaît dans l'exercice ci-dessous :

2) a Tracer un triangle STR isocèle en T tel que :
ST = 5 cm et $\widehat{STR} = 56°$.
b Mesurer les angles $\widehat{TSR}$ et $\widehat{TRS}$.
c Quelle conjecture faire concernant les mesures de ces angles ?

Figure 5 : Exemple d'exercice illustrant le double sens du mot « mesure »

Les élèves auront obtenu deux nombres à la question b, et leur demander ensuite de *conjecturer* quelque chose sur ces deux valeurs n'a pas de sens : soit elles sont égales, soit différentes, soit éventuellement différentes mais proches, mais il s'agit d'un constat et non d'une conjecture ! En revanche, les questions prennent davantage de sens (du point de vue mathématique) si l'on remplace la question b. par « détermine les mesures *empiriques* des deux angles » et la question c. par « quelle conjecture faire concernant les mesures *théoriques* de ces angles ? ». La question de l'accessibilité pour les élèves de cette tâche reste toutefois posée. Par ailleurs, s'il s'agit là de travailler sur la propriété d'égalité des mesures des angles à la base d'un triangle isocèle, la question de la généralisation, au-delà d'un seul triangle, n'est pas prise en charge.

Enfin, si l'on se réfère à l'exemple concernant l'angle de 89° évoqué dans l'introduction de ce texte, il est même probable que dans bien d'autres tâches le contrat est opaque pour les élèves et qu'elles sont porteuses de confusion. En effet, on peut supposer que, au moins pour certains élèves, une mesure est le résultat d'un mesurage dans le milieu matériel, ce qui hypothèque largement la compréhension de certaines consignes.

Pour conclure sur la prise en charge des questions liées à la mesure en sixième en géométrie à propos de la notion d'angle dans les manuels, nous notons qu'elle reste problématique du point de vue du sens de l'activité mathématique. Il nous semble que les auteurs de manuels agissent « comme si » les notions de figure et de mesure théorique étaient construites ou transparentes, « comme si » les règles du jeu géométrique (lien entre dessin et figure) étaient transparentes, « comme si » les mesures empiriques étaient des mesures exactes et qu'il y avait coïncidence entre mesures empiriques et théoriques.

Pour conclure sur la mesure en géométrie, il nous semble que le rapport entre mesure empirique et mesure théorique est un point clé, mais une problématique peu identifiée en tant que telle, à la fois dans les travaux de didactique, les textes officiels et les manuels. Notons que ce constat rejoint celui de Tanguay et al. (2014). La distinction entre mesure empirique et mesure théorique nous semble source de malentendu entre professeur et élèves au début du collège : on fait « comme si » c'était transparent et/ou déjà construit.

Des pistes sont proposées par certains chercheurs pour la prise en charge de l'introduction de G2, comme par exemple Houdement et Kuzniak (2003) ou Houdement (2007), qui plaident pour une place plus grande faite à G1 et une reconnaissance des deux paradigmes. Cependant, l'accent mis sur le rôle de la mesure dans cette introduction est variable. Ainsi, Arsac (1993-1994) propose une situation d'introduction de l'inégalité triangulaire qui permet une réflexion sur le rapport entre dessin et figure, mais lorsque les élèves évoquent que « ce n'est pas possible [de construire le triangle] car avec des nombres décimaux de plus de 2 chiffres après la virgule, on ne peut pas faire un triangle avec des mesures exactes. », l'auteur précise que cela permet d'engager un débat qui serait intéressant mais qui n'est pas ce qui l'intéresse ici. Or il nous semble que précisément, cela pourrait permettre de travailler sur la question du rapport entre dessin et figure. Quelques travaux identifient bien comme un obstacle majeur à l'entrée dans la démonstration la question du rapport entre mesure empirique et théorique (ainsi Reynes (1999-2000), Capponi (1988), Tanguay et Geeraerts (2012) ou Tanguay et al. (2014)). Ces derniers notamment pointent que le travail sur l'approximation des mesures permet de travailler le caractère idéal des objets de la géométrie (ibid.) et proposent de remédier à ce problème en « étudi[ant] la géométrie exactement comme on étudie la physique expérimentale » (p. 11). Notons toutefois qu'ils ne prennent pas en considération en tant que telle la question de l'articulation entre mesure empirique et mesure théorique.

Or, nous pensons que la reconnaissance de la distinction entre mesure empirique et mesure théorique est nécessaire. Et l'un des leviers pourrait être la dispersion naturelle de la première, par opposition à l'unicité de la seconde, par exemple quand tous les élèves ne trouvent pas la même réponse lorsque la question porte sur l'alignement de points et que l'angle vaut 181°. Cela permettrait en outre de contribuer à pointer et assumer la distinction entre modèle et réalité. Mais cela supposerait de reconnaître l'imprécision du dessin et la dispersion des mesures propre à G1, notamment lors du travail sur la mesure de certaines grandeurs, or ce n'est pas le cas, comme nous l'avons montré dans la partie précédente de cet article.

Mesure et statistique

Comme mentionné plus haut, la statistique est un domaine potentiellement propice à un travail sur la dispersion de mesures de grandeurs, « exemple paradigmatique » (Chevallard et Wozniak, 2003) de variabilité. D'un point de vue épistémologique, un traitement statistique de mesures doit être motivé par une question et implique une discussion sur les causes de dispersion dans le but d'une prise de décision. Il peut également inclure une réflexion sur la manière de réduire la dispersion. Cela suppose notamment une définition « correcte » de la série (de l'expérience, de la population et du caractère étudiés etc.). Or Chevallard et Wozniak (ibid.) pointent que l'enseignement de la statistique est pour une bonne part réduit à ses aspects calculatoires, ne prenant pas en considération la « variabilité réelle » du monde « extramathématique ».

Dans les textes officiels, l'un des « thèmes de convergence » des programmes concerne la « pensée statistique sur le monde ». Il est mentionné que de nombreuses activités doivent intégrer la notion d'incertitude dans l'acte de mesurer et développer l'analyse de séries de mesures. C'est dans le domaine « organisation et gestion de données, fonctions », dans le paragraphe « statistique » du programme de troisième, que l'on trouve des éléments sur ces questions : l'une des capacités mentionnées est « exprimer et exploiter les résultats de mesures d'une grandeur » et les commentaires associés précisent que

> « [l]a notion de dispersion est à relier, sur des exemples, au problème posé par la disparité des mesures d'une grandeur, lors d'une activité expérimentale, en particulier en physique

et chimie. »

Dans les nouveaux programmes, on trouve également pour le cycle 4 la préconisation : « Organiser et traiter des résultats organisés de mesures ».

Nous avons repéré, dans cinq manuels de troisième, la proportion de travail sur des séries de mesures de grandeurs et la présence de tâches portant sur la dispersion liée effectivement au mesurage empirique. Nous avons également distingué les séries de mesures de grandeurs discrètes (notamment dénombrement de collections discrètes) et les séries de mesures de grandeurs continues. Nous avons compté un item pour une série, ce qui correspond grossièrement à un exercice, compte tenu du fait que presque tous les exercices sont organisés autour de l'étude d'une série. Nous résumons les résultats dans le graphique suivant.

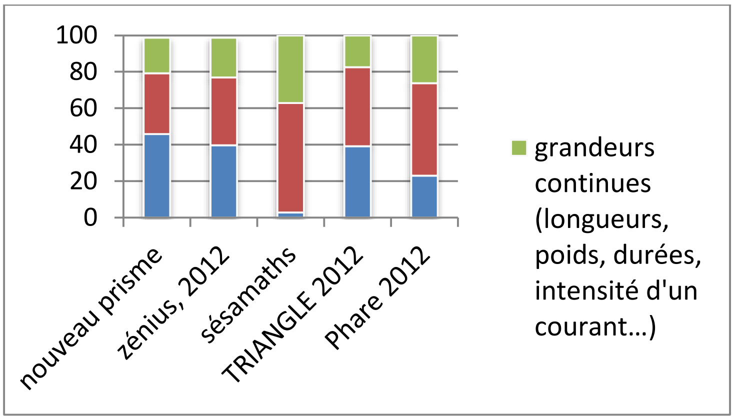


Figure 6 : Résultats de l'étude de manuels de troisième en statistique

Lorsque les grandeurs sont discrètes, la plupart des séries sont à valeurs entières, quelques-unes sont décimales, mais elles sont presque toujours considérées comme exactes. Un seul exercice sur l'ensemble des manuels part de mesures *réalisées par les élèves*. Entre 1 et 4 exercice(s) par manuel présente(nt) un potentiel à discuter des questions de précision des mesures mais, parmi eux, beaucoup semblent potentiellement problématiques. Ainsi, l'extrait suivant semble sous-tendu par l'idée que le maître, lui, obtient une valeur exacte lorsqu'il mesure et que la variabilité est le résultat d'*erreurs* liées à la maladresse des élèves : on peut supposer que cela ne contribuera pas à construire une conception épistémologiquement valide de la notion d'incertitude de mesure.

13 Un professeur des écoles a demandé à ses élèves de tracer un segment de longueur 7 cm.
Il a mesuré, en centimètres, tous les segments et a noté les longueurs suivantes :

7	6,8	7,1	7,4	7,3	7,1	6,8	7	6,9	7	7,3
7	7,4	7,1	7	6,9	7	7,3	6,9	7	7,2	7

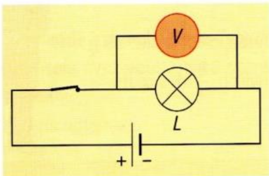
1) Déterminer la médiane de cette série.
2) Calculer la moyenne de cette série, arrondie au millimètre près.
3) Calculer l'étendue de cette série.

Figure 7 : Exercice problématique sur la notion d'incertitude

Certaines tâches proposent parfois un travail sur la prise de décision, les causes de dispersion, la pertinence d'un paramètre statistique, la notion d'intervalle, ou encore les valeurs aberrantes, mais la plupart sont « incomplètes », les conditions de l'expérience ou les caractères n'étant pas correctement définis : les causes de variation sont non contrôlées ou non explicites, l'analyse de la série n'est pas liée à une prise de décision, on ne trouve pas l'idée d'intervalle etc. Par exemple, dans l'exercice ci-dessous, on propose une réflexion dans la question 3 sur les causes d'incertitudes, mais il n'est pas clair dans l'énoncé si les élèves ont tous utilisé la même lampe ou un matériel différent.

20 SC **Physique Chimie**

Chaque élève d'une classe réalise le montage ci-dessous, puis mesure la tension (en volts) aux bornes de la lampe *L*.



Les tensions mesurées sont les suivantes :

Tension (en V)	2,49	2,50	2,51	2,52	2,53
Effectif	2	17	7	3	1

1) Quel est l'effectif total ?

2) Calculer la moyenne de cette série statistique.

3) Donner plusieurs explications au fait que tous les élèves n'ont pas trouvé le même résultat.

Figure 8 : Exercice incluant une réflexion sur les causes de dispersion des mesures

Il existe quelques rares propositions d'enseignement prenant en charge la question des incertitudes de mesure, comme Petrosino et al. (2003) en grade 4 (CM1) sur la notion d'écart-types.

Par ailleurs, Chevallard et Wozniak (2003) mentionnent la dispersion des mesures de grandeurs comme support possible pour un travail en statistique, mais pointent un obstacle : l'ignorance de la théorie probabiliste des erreurs de mesure par les enseignants du secondaire et, en grande partie, de l'enseignement supérieur.

Pour conclure à propos de la statistique, nous considérons donc que la dispersion de mesures de grandeurs est un support potentiel pour le travail sur les notions statistiques et quelques situations pertinentes existent, mais l'exploitation de cette possibilité est très limitée dans les manuels et pas toujours de façon pertinente du point de vue épistémologique.

Axe 3 : mesure et modélisation en classes de mathématiques et de physique

Nous nous intéressons ici à la modélisation au sens large, c'est-à-dire à l'étude des rapports entre monde réel et théorie. Ce choix nous amène à considérer deux aspects sensiblement différents de la modélisation : d'une part des situations d'établissement d'une loi en physique et d'un théorème ou une propriété en mathématiques, d'autre part la modélisation de situations concrètes dans lesquelles il s'agit de mathématiser la situation (dans un processus de « mathématisation horizontale », Yvain 2015), de raisonner dans le modèle puis de revenir à la situation. Nous comparons l'établissement d'une loi en physique et l'établissement d'un théorème en mathématiques. Nous cherchons à voir si les différences d'ordre épistémologique entre les deux disciplines pointées dans la première partie sont prises en charge, et si les enjeux épistémologiques associés sont travaillés. En particulier, nous étudions si les élèves sont potentiellement en situation de prise de décision, en lien avec la question des incertitudes.

Nous nous limitons, pour les mathématiques, au cas de l'élaboration de théorèmes en géométrie à partir de conjectures fondées sur des mesures (par exemple conjecturer le théorème de

Pythagore à partir de quelques mesures sur des triangles) et à l'élaboration d'une loi à partir du champ empirique en physique. Dans les deux cas l'appui sur des mesures empiriques suppose de prendre en compte les incertitudes et cette gestion n'est pas du tout évidente pour les élèves, comme en témoigne l'expérience réalisée par Capponi (1998) en géométrie avec des élèves de quatrième. En outre, en géométrie, la conjecture est « double » : il s'agit de conjecturer une relation entre les mesures théoriques à partir des mesures empiriques d'une part et conjecturer une loi générale à partir de cas particuliers d'autre part. Notons que cela rejoint les questions liées à l'articulation des paradigmes G1 et G2 (G1 devant devenir un outil au service de G2).

Critères d'analyse

Les critères retenus sont les suivants : y a-t-il appui sur des résultats de mesurage empirique ? Si oui, s'agit-il de mesures réalisées par les élèves avec des instruments et/ou par un logiciel de géométrie dynamique ? Les élèves sont-ils amenés à répéter des mesures (dans le même cas – N mesures de la même grandeur – ou dans des cas différents). Lors du traitement des mesures empiriques, quelle est la prise en charge des questions de dispersion ?

En ce qui concerne l'étude de la prise en compte des incertitudes, nous regardons si la question de la dispersion des mesures empiriques est prise en charge voire utilisée comme levier. Par exemple, si une question telle que « est-ce que le fait que les mesures empiriques sont proches correspond au fait que les mesures théoriques sont égales ? »[11] est abordée ou passée sous silence. Nous étudions en outre la question de la validation, c'est-à-dire si la démonstration est abordée en géométrie et si les limites de validité des modèles sont explorées en physique.

Objets d'étude

Nous avons ciblé ici plusieurs sujets. Nous avons étudié 5 à 7 manuels par notion en mathématiques et 4 à 7 manuels par niveau en physique. En mathématiques nous avons étudié la manière dont sont établies : les propriétés de conservation de la symétrie axiale en 6$^{\text{ème}}$, les propriétés de conservation de la symétrie centrale et la somme des angles d'un triangle en 5$^{\text{ème}}$, l'égalité de Pythagore en 4$^{\text{ème}}$, la propriété de Thalès en 4$^{\text{ème}}$ et l'établissement de la formule de la longueur du cercle (Pi) en cycle 3 et en 6$^{\text{ème}}$. En physique nous nous sommes intéressées à la détermination des températures de changement d'état de l'eau en cycle 3 et en 5$^{\text{ème}}$ et à l'établissement des lois d'additivité des intensités et des tensions et de la loi d'Ohm en 4$^{\text{ème}}$.

Les manuels en mathématiques

Nous distinguons les résultats concernant l'introduction des différentes propriétés d'une part et l'introduction de Pi d'autre part.

Quels que soient le niveau et la propriété considérée, les manuels choisissent très majoritairement de faire établir une conjecture à partir de mesures empiriques réalisées par les élèves : seule une collection fait d'autres choix à tous les niveaux (l'introduction s'appuie soit sur des mesures exactes données par le manuel, soit sur la résolution d'un problème).

Un peu plus de la moitié des manuels utilise un logiciel, parfois aussi un environnement papier-crayon, avec un rapport variable entre les deux : le logiciel sert notamment parfois à « renforcer » la conjecture papier-crayon. La répétition des mesures dans des cas différents n'est pas systématique, mais plus fréquente sur logiciel, toutefois elle est souvent limitée à 3 à 5 cas. Le résultat essentiel est que tous semblent supposer que les valeurs vont « tomber juste »,

[11] La formulation d'une telle question en classe serait évidemment adaptée.

y compris pour le théorème de Thalès (pour lequel la probabilité que les rapports soient égaux est faible). Ils laissent en tout cas la question de l'éventuelle non correspondance entre les mesures empiriques et théoriques à la charge du déroulement ou à la charge du logiciel (notons que Houdement (2007) avait déjà pointé que le rapport à la précision et à l'erreur de mesure n'est pas le même en environnement virtuel). Enfin, les deux niveaux de conjecture ne sont distingués dans aucun manuel.

La question de la dispersion des mesures empiriques et de la différence de nature entre mesure empirique et théorique est donc encore une fois « gommée » et ne sert pas de levier pour motiver le travail dans G2.

A propos de l'introduction de Pi en lien avec la formule du périmètre du cercle, les manuels choisissent majoritairement (quatre manuels sur sept) une entrée par des mesures empiriques réalisées sur des objets physiques par les élèves. Les mesures sont en général répétées sur plusieurs objets ou faites par les élèves séparément puis mises en commun. Dans un manuel, la mesure de la même grandeur est répétée huit fois puis les valeurs sont confrontées avec les mesures faites sur d'autres objets par d'autres élèves. La dispersion des mesures empiriques est donc largement mise en évidence, mais son traitement reste très limité, aucun manuel ne prenant réellement en charge son traitement ensuite.

Les manuels en physique

Modélisation et établissement d'une loi / Les manuels en physique

En physique pour la détermination des températures de changement d'état de l'eau, les manuels (4 en cycle 3 et 7 en 5ème) prennent appui sur des mesures empiriques réalisées par des élèves et/ou sur des mesures « soi-disant empiriques » données dans le manuel. Lorsque de telles mesures sont données, elles correspondent à la valeur théorique dans tous les manuels sauf un. Il n'y a pas de répétition des mesures prévue (même si elles peuvent apparaître lors du déroulement, si plusieurs groupes d'élèves les réalisent, comme il est habituel lors des TP), et seul un manuel (le même) prend en charge la question de la généralisation.

• Les résultats

Temps (min)	0	5	10	15	20	25	30	35
Température (°C)	−5	0	0	0	2	5	10	16
Contenu du tube	glace	eau liquide + glace			eau liquide			

À quelle température l'eau bout-elle ?

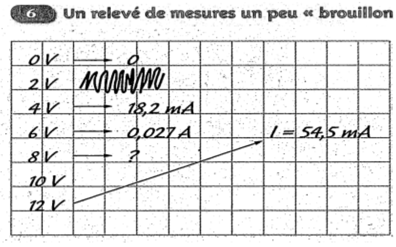
Voici les résultats obtenus au cours d'une expérience semblable à celle du doc. 7 :

0 min	2 min	4 min	6 min	8 min	10 min	12 min
17 °C	37 °C	56 °C	73 °C	88 °C	98 °C	98 °C

Figure 9 a et b : Extraits de manuel sur les températures de changement d'états de l'eau

Pour les lois des tensions et des intensités en électricité en 4ème – comme pour les températures de changement d'état – les manuels prennent appui sur des mesures empiriques réalisées par des élèves et des mesures « soi-disant empiriques » données dans le manuel. Ces mesures « tombent juste » systématiquement pour les lois d'additivité, mais « ne tombent pas juste » dans certains manuels (4/7) pour la loi d'Ohm. Lors du traitement des résultats de mesure, pour les résultats qui « tombent juste », les mesures empiriques et théoriques, la réalité et le modèle sont assimilés. Pour les autres (4 manuels, sur la loi d'Ohm), le modèle est « plaqué » très rapidement sans justification et sans réflexion sur les causes de dispersion.

Il n'y a pas de répétition des mesures prévue, sauf dans deux exercices sur l'ensemble des manuels et des chapitres étudiés, mais il peut éventuellement y avoir plusieurs mesures (réalisées par les différents groupes d'élèves s'ils manipulent – notons cependant que cela n'est pas évoqué). Dans 6 manuels sur 7, au moins une des lois est établie à partir d'*une seule* mesure. On trouve aussi dans 6 manuels sur 7 des exercices qui traitent les mesures empiriques comme des mesures théoriques.



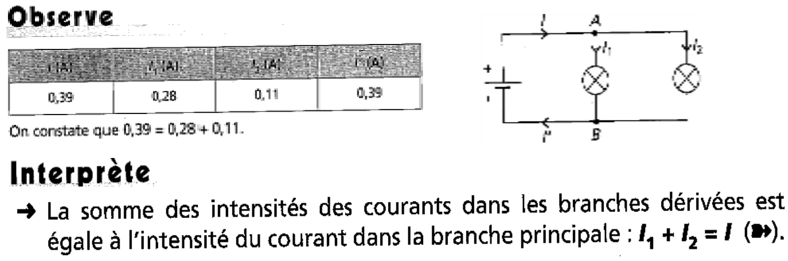


Figure 10 a et b : Exercices traitant des mesures empiriques comme des mesures théoriques

Pour conclure sur la modélisation, nos analyses montrent que la dispersion des mesures n'est pas utilisée comme levier pour donner du sens à l'activité d'élaboration de loi / théorème, ni en mathématique ni en physique. Souvent les natures empirique/théorique des mesures sont confondues, et les activités proposées dans les manuels peuvent même être considérées comme sources potentielles de confusion à la fois sur les objets manipulés et sur la nature et les objectifs même de la démarche. Enfin, notons que malgré le fait que les activités soient de nature épistémologique différente entre mathématiques et physique, on observe des similarités dans la manière dont elles sont traitées.

CONCLUSION

Les différentes analyses réalisées, tant sur les recherches en didactique que sur les instructions officielles et les manuels solaires, montrent que la distinction entre mesure empirique et théorique et la question de la variabilité des mesures empiriques sont très peu prises en charge en mathématiques comme en physique.

Il ne s'agit pas ici de tirer des conclusions générales, dans la mesure où cette étude a un certain nombre de limites. D'une part nous n'avons considéré que certains domaines dans les deux disciplines et ciblé certaines notions particulières, d'autre part notre analyse des travaux de recherche ne prétend pas à l'exhaustivité, loin de là, d'autant plus que la question de la mesure renvoie à des domaines (disciplinaires et de recherche) nombreux et très variés.

Cependant il nous semble que nos travaux montrent à la fois que les enjeux liés à la mesure, notamment la distinction entre mesure empirique et théorique, sont peu pris en charge, et que cette prise en charge est nécessaire voire essentielle. Tout d'abord, il s'agit d'une problématique dans la classe : dès lors que les élèves sont amenés à pratiquer des activités de mesurage empirique, ils sont nécessairement confrontés à de la dispersion. Ensuite, cette distinction est un obstacle/levier potentiel pour l'enseignement et l'apprentissage dans différents domaines : géométrie, nombres, etc. Notamment, il nous semble que confronter les élèves aux incertitudes de mesure pourrait permettre de montrer plus facilement les limites de la géométrie 1 pour certains problèmes et ainsi justifier la nécessité d'un nouveau paradigme géométrique. De ce fait, même si nous ne l'avons abordé que rapidement, cette question est particulièrement cruciale à la transition école-collège. De plus, comme nous l'avons mis en évidence, la distinction entre mesure théorique et mesure empirique est un levier pour travailler avec les élèves des enjeux épistémologiques fondamentaux (nature de l'activité en physique et en mathématiques, distinction modèle-réalité), ce qui semble nécessaire notamment dans une perspective de mise en cohérence des disciplines. Enfin, nous considérons que l'absence de prise en charge est susceptible de générer des obstacles dans la suite de la scolarité, notamment quand les mesures deviennent subitement entachées d'incertitude – lorsque l'erreur est appréhendée comme variable aléatoire notamment.

La résistance à la variabilité pointée par Chevallard et Wozniak (ibid.), ainsi que la difficulté à appréhender mathématiquement l'approximation – et encore davantage celle liée à la mesure empirique – font partie des raisons pouvant expliquer la faible prise en charge de ces questions. Une autre raison qui semble essentielle est la maîtrise insuffisante par les enseignants de certaines compétences disciplinaires mais aussi épistémologiques et didactiques liées à ces questions (Passelaigue et Munier 2015, Séré et al. 1998, Houdement et Kuzniak, 2000). Ainsi, Séré et al. (ibid.) soulignent que la situation des enseignants n'est pas confortable « Comment faire cohabiter les théories bien établies qui […] donnent [à la physique] un air de vérité, et les expériences qui mettent en jeu les imperfections des appareils et des manipulations ? » et ils considèrent qu'à l'heure actuelle « les enseignants peuvent « dire » une attitude raisonnable, différenciée d'une situation à l'autre, et exprimer ce qu'il faudrait « faire », en se gardant cependant de le faire par manque de temps et aussi des concepts indispensables. ».

Par ailleurs, on peut se demander s'il existe un âge avant lequel ces considérations sont hors de portée ou déstabilisantes pour les élèves. On peut en effet considérer qu'un risque serait celui de développer chez les élèves un certain scepticisme vis-à-vis des sciences, voir un « ultra-relativisme », c'est d'ailleurs ce qu'avaient pointé Séré et al. (2001) avec des enseignants du secondaire (cf. supra). Cela souligne la nécessité, si un travail est mené sur les limites des modèles, de ne pas le penser indépendamment d'activités qui montrent aussi le pouvoir opératoire/heuristique de ces modèles. Cependant, les travaux de Munier et al. (2013) montrent qu'il est possible d'initier un travail sur les incertitudes de mesure en cycle 3, et d'aborder avec les élèves, de manière qualitative, les causes de dispersion et la notion d'intervalle de confiance.

Cela pointe la nécessité de développer des recherches pour questionner le moment propice pour travailler avec les élèves sur la précision et les incertitudes, les possibilités pour concilier la construction du sens de la mesure théorique et le caractère intrinsèque de dispersion des mesures empiriques. Il s'agirait ainsi notamment d'étayer la construction d'un curriculum cohérent sur ces questions, problématique particulièrement complexe notamment du fait que la mesure est introduite à un moment où il s'agit d'une notion « non encore formalisable » (Robert et Pouyanne, 2004).

Notre travail plaide, enfin, pour le fait d'aborder les questions liées à la mesure en croisant les regards des deux disciplines, d'autant plus au vu de la place croissante accordée à la modélisation et à l'interdisciplinarité dans les prescriptions. En effet nos résultats montrent à la fois l'intérêt et la nécessité de développer des approches inter-didactiques sur ces questions, tant pour la recherche que pour l'enseignement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G. (1993-1994) Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie – Vérification et démonstration. *Petit x* 7 5-33.

ARTAUD M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques* 100-139.

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC (APMEP) (1982) Mots. Brochure 46. Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs.

BESSOT A., EBERHARD M. (1983) Une Approche Didactique des Problèmes de la Mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(3) 293-324.

BIREBENT A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BRONNER A. (1997) *La question du numérique : le numérique en question*. Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2.

BROUSSEAU G. (2002) Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In Dorier J-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (coordonné par), *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001*, La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1991) Le poids d'un récipient, étude des problèmes de mesurage en CM Grand N 50 65-87.

CAPPONI B. (1988) Mesure et démonstration. Un exemple d'activité en classe de quatrième. *Petit x* 17 29-48.

CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7)*

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée *Petit x* 55 5-32.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2002) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76.

CHEVALLARD Y., CHAMBRIS C. (2015) *Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme*. Sur le site de la CFEM (consultation le 21/04/2016) http://www.cfem.asso.fr/actualites/GrandeursetnombresYCCC.pdf.

CHEVALLARD Y., WOZNIAK F. (2003) Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. Cours donné à la XIIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 20-29 août 2003). In Mercier, A. & Margolinas, C. (Eds), Balises pour la didactique des mathématiques, La Pensée sauvage, Grenoble, 195-218.

COPPE S., DORIER J-L., MOREAU V. (2005) Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de cinquième, *Petit x* 68 5-37.

DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*. Publication de l'IREM de Nantes. Paris : CEDIC / Fernand Nathan. 338 p.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J. (1983) Mesure des longueurs et des aires. Brochure, n°48, IREM, Université Paris 7,

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97022.pdf.

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM* 67 69-84.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2002) Approximations géométriques. *L'Ouvert* 105 19-28. IREM de Strasbourg.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près parallèles » ou le versant géométrique du « presque égal » *Petit x* 61 61-74.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(1) 89-116.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2001) Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. In *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

JACQUIER I. (1995) Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *Petit x* 41 27-50.

KUZNIAK A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 15 75-91.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14/1-2 165-209.

LEBESGUE H. (1975) *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard. 184 p.

LUBBEN F., MILLAR R. (1996) Children's ideas about the reliability of experimental data. *International Journal of Science Education* 18(8) 955-968.

MAISCH C., NEY M. et BALACHEFF N. (2008) Quelle est l'influence du contexte sur les raisonnements d'étudiants sur la mesure en physique ? *Aster* 47 43-70.

MARUANI A. (1996) Aspects de la mesure; repères, problématiques et enjeux. *Bulletin de l'Union des Physiciens 787* 1433-1443.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (France) (2002) *Documents d'application des programmes de 2002, grandeurs et mesures à l'école élémentaire*. Paris : direction de l'enseignement scolaire.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (France) (2006) *Socle commun de connaissances et de compétences et modifiant le code de l'éducation*. Décret du 11 juillet 2006.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (France) (2007) Ressources pour les classes de 6è, 5è, 4è et 3è – Géométrie au collège.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (France) (2008a) *Programmes d'enseignement de l'école primaire.* Bulletin officiel hors série n°3 du 19 juin 2008.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (France) (2008b) *Programmes du collège*. Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008.

MUNIER V., CHESNAIS A., MOLVINGER K. (2014) Mesure et incertitudes en mathématiques et en physique à la transition école-collège : éléments d'épistémologie et difficultés des élèves, *Actes des 8èmes rencontres de l'ARDIST*, Marseille, 12-14 mars 2014, *Skholê* 18-1 451-458.

MUNIER V., MERLE H., BREHELIN D. (2013) Teaching Scientific Measurement and Uncertainty in Elementary School. International Journal of Science Education 35 2752-2783.

MUNIER V., CHESNAIS A., MOLVINGER K. La mesure en mathématiques et en physique : enjeux épistémologiques et didactiques, soumis pour l'ouvrage *Epistémologie et didactique* faisant suite aux 3èmes journées épistémologie de l'Université Montpellier 2.

NOTA M. (2002) Comment le physicien mesure-t-il ses propos? Un point de vue épistémologique sur "grandeur et mesure". In Dorier J-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (coordonné par), Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001, La pensée sauvage éditions.

PASSELAIGUE D., MUNIER V. (2015) Schoolteacher Trainees' Difficulties about the Concepts of Attribute and Measurement, à paraître dans *Educational Studies in Mathematics*.

PARZYSZ B. (1988) Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP* 364 339-350.

PERDIJON J. (2012) *La mesure, histoire, sciences et technique*. Paris : Vuibert.

PERRIN D. (2011) Mathématiques d'école. *Nombres, mesures et géométrie*. Cassini 402p.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989-1990) L'aire et la mesure *Petit x* 24 5-36.

PETROSINO, A J., LEHRER, R. ET SCHAUBLE, L. (2003). Structuring Error and Experimental Variation as Distribution in the Fourth Grade. *Mathematical Thinking and Learning 5(2&3)* 131-156

REYNES F. (1999-2000) la notion de mesure exacte. De l'impossibilité physique a la nécessité mathématique, les conditions d'une rupture inévitable, *Petit x* 53 69-79.

ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : L'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation *Petit x* 63 7-29.

ROBERT A., POUYANNE N. (2004) Formateurs d'enseig nants de mathématiques du second degré, Document pour la formation. Brochure IREM de Paris 7 5.

ROGALSKI J. (1979) Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications. Les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes *Bulletin de l'APMEP* 320 563-586.

ROUCHE N. (2006) *Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : Ellipses.

SALIN M-H. (2003) Du CM2 à la sixième, quelques pistes pour une transition plus efficace (2ème partie) *APMEP - Plot* 14 2-9.

SERE M.G., JOURNEAUX R., WINTHER J. (1998) Enquête sur la pratique des enseignants de lycée dans le domaine des incertitudes. *Bulletin de l'Union des Physiciens 801* 247-254.

SERE M.-G., WINTHER J., LE MARECHAL J.F., TIBERGHIEN A. (2001) Le projet européen "Labwork in Science Education" [Les Travaux pratiques dans l'enseignement des sciences en Europe] Bilan et perspectives. *Bulletin de l'Union des Physiciens 839* 1727-1740.

SERE, M.-G. (2008). La mesure dans l'enseignement des sciences physiques. Evolution au cours du temps. *Aster 47* 25-42.

TANGUAY D., GEERAERTS L., SABOYA M., VENANT F., GUERRERO L., MORALES C. (2014) An activity entailing exactness and approximation of angle measurement in a DGS, *Proceedings CERME 8.*

TANGUAY D., GEERAERTS L. (2012) D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant *Petit x* 88 5-24.

VERGNAUD G. (1983) (coordonné par) Didactique et Acquisition du Concept de Volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (1) 9-121.

VOLKWYN T., ALLIE S., BUFFLER A., LUBBEN A., CAMPBELL B. (2004) First year physics students' understanding of the measurement in the context of laboratory practicals. In Buffler A. & Laugksch R.C. (éd.). Proceeding of the 12th Annual Conference of the South African Association for Research in Mathematics, *Science and Technology Education* 1011-1017.

WALLISER B. (1977) *Systèmes et modèles*. Paris : Éd. du Seuil.

YVAIN S. (2015) Vers une possible dévolution de la mathématisation aux élèves dans un processus de modélisation. Communication à la XVIIIème école d'été de didactique des mathématiques (Brest, 19-26 août 2015).

QUELLES ALTERNATIVES POUR L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL ALGEBRIQUE AU COLLEGE ?

Céline **CONSTANTIN**

Aix-Marseille Université, I2M

celine.r.constantin@gmail.com

RésuméLa thèse présentée dans ce texte (Constantin 2014) s'intéresse à l'élaboration d'alternatives pour enseigner le calcul algébrique au collège, et plus particulièrement la propriété de distributivité qui joue un rôle central dans cet enseignement. Deux référents émergent de nos analyses des spécificités des savoirs à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique vis-à-vis de difficultés protomathématiques (Chevallard 1985) prégnantes du côté des élèves. La notion de transformation de mouvement (Drouhard 1992) d'une part, et l'exploration des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (ou FUG, Robert 1998) de la distributivité d'autre part permettent d'envisager des savoirs complémentaires aux savoirs mathématiques et liés aux aspects sémantiques et syntaxiques des écritures algébriques au regard d'un domaine d'étude à la fois numérique et algébrique. À partir d'analyses de manuels et de programmes, des conditions et des contraintes sont dégagées pour élaborer une ingénierie didactique prenant en compte ces savoirs. Les résultats d'une première expérimentation réalisée en 5e concernent les discours dont les élèves parviennent à s'emparer, justifiant et soutenant leurs techniques de calcul algébrique, ainsi que les organisations des connaissances qui se façonnent, faisant le lien entre leurs pratiques calculatoires numériques anciennes et celles en construction à la fois numériques et algébriques. Enfin, les résultats d'une nouvelle étude didactique et épistémologique relative à la notion de substitution permettent d'avancer des fondements pour poursuivre le travail engagé.

Mots clés

Calcul algébrique, distributivité, analyse épistémographique, théorie anthropologique du didactique, aspects formalisateur unificateurs et généralisateurs

UN REGARD SUR LES ERREURS D'ELEVES ET LES SAVOIRS MATHEMATIQUES

Les origines du travail de thèse présenté ici se situent dans des observations d'erreurs d'élèves récurrentes dans le domaine du calcul algébrique (Constantin, 2014). Ces erreurs sont celles de Yoan et Joanna par exemple (Constantin, 2008) dont la biographie didactique met à jour des logiques d'apprentissage tout au long de leur année de Seconde face à des achoppements constants. Les difficultés qu'ils donnent à voir se situent bien en amont de complexifications à l'occasion d'adaptations de connaissances anciennes (Robert, 2005) dans le calcul algébrique. Elles relèvent de reconnaissance de formes ou d'implicites dans les choix des techniques à opérer en lien avec les domaines d'efficacité de ces techniques. Elles s'accompagnent de malentendus avec les textes de savoirs qui s'entretiennent et contribuent à cloisonner les techniques de calcul, et faire obstacle aux adaptations. Ces élèves se heurtent à des difficultés protomathématiques (Chevallard 1985) prégnantes :

> Une telle difficulté peut surgir de *la non maîtrise d'une capacité requise par le contrat didactique pour le bon entendement de celui-ci*, la maîtrise en question figurant alors

> comme *prérequis du contrat didactique*. […]
>
> 4.29. Les notions protomathématiques, par exemple la notion de « pattern », se situent à un niveau d'*implicitation* plus profond (pour l'enseignant, pour l'élève). Ce caractère d'implicite s'exprime, dans le contrat didactique, par le fait *qu'elles « vont de soi »* - sauf précisément lorsqu'il y a difficulté protomathématique et *rupture de contrat*. (Chevallard, 1985 p. 55)

Les observations de techniques assujetties aux formes d'expressions, à des modifications mathématiquement non pertinentes comme le degré ou la nature des coefficients pour ces deux élèves font écho à des résultats d'autres travaux comme ceux de Tonnelle (1979) ou de Croset (2009). Toutefois, de la modélisation de l'activité de l'élève en termes de praxéologies dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1997) émergent des savoirs mathématiques qui éclairent peu les savoir-faire dans la finesse des adaptations à produire en fonction des formes d'expression. L'importance d'éléments ostensifs (Chevallard et Bosch, 1994), la prise d'indices visuels incontrôlés donnent à voir côté élèves des praxéologies muettes ou faibles (Wozniak, 2012), c'est-à-dire des praxéologies dont la composante technologique ne fonctionne pas avec la composante praxique dans un rapport d'action, de formulation et de validation.

Ce constat s'érige à tous les niveaux, des savoirs appris aux savoirs à enseigner et enseignés. Par exemple, les analyses de manuels et de programmes menées par Assude, Coppé & Pressiat (2012) témoignent d'un « émiettement des tâches séparées de leur élément technologique » et combien « la propriété de distributivité perd de sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs ». Ces constats m'ont conduite à interroger les savoirs liés au calcul algébrique : peut-on identifier ou élucider des savoirs accompagnant les savoirs mathématiques, et qui seraient véritablement opérationnels pour le calcul algébrique ? Par savoirs opérationnels, j'entends des savoirs qui permettent des adaptations de connaissances (Robert, 2005) et qui puissent nourrir un discours (Mercier, 2012) éclairant la portée des techniques. Les difficultés protomathématiques en lien avec les indices ostensifs mathématiquement pertinents m'ont amenée à m'intéresser plus particulièrement aux traitements des expressions symboliques algébriques (Drouhard, 1992), et à exclure de fait le cas des propositions et du calcul équationnel, pour me centrer sur les genres de tâches scolaires liées au développement, à la factorisation et à la réduction tels qu'on les rencontre dans les classes. Les technologies mathématiques associées telles qu'elles apparaissent dans les programmes du collège où elles se construisent, prennent la forme d'identités algébriques. Etant donné que ces identités ne suffisent pas à rendre compte de la finesse des adaptations des techniques, existe-t-il d'autres savoirs utiles, complémentaires à même d'éclairer véritablement ces techniques ?

Je me suis de plus centrée sur la propriété de distributivité, comme propriété fondamentale à ce niveau d'enseignement.

Des analyses de différents savoirs susceptibles d'accompagner les techniques du calcul algébrique menées dans la thèse ont émergé deux types de savoirs qui semblaient revêtir un potentiel comme savoir opérationnel. Il s'agit d'une part de savoirs de nature sémio-linguistique en appui sur la notion de transformation de mouvement (Drouhard, 1992), et d'autre part de savoirs de nature numérico-algébrique fondés par les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur (ou FUG, Robert, 1998). Dès lors, quels savoirs à enseigner y associer, et dans quelle mesure et comment peuvent-ils être enseignés et appris ?

Je précise ici, mais cela est développé dans la thèse, que les savoirs considérés ne sont envisagés que comme des savoirs complémentaires pour l'enseignement des formalismes (Chevallard, 1989).

Le modèle des expressions symbolique algébriques dont participent les transformations de mouvement, s'inscrit dans la perspective d'une description linguistique des objets de l'algèbre élémentaire et de leur manipulation tels qu'on les rencontre dans les classes. Le calcul algébrique est alors modélisé par un ensemble d'applications d'un langage dans lui-même $\mathcal{T}$: L → L qui à une expression symbolique algébrique associe une autre expression symbolique algébrique qui lui est égale, en appui sur des propriétés mathématiques de corps commutatif ordonnée de l'ensemble des nombres réels pour les expressions qui nous occupent. Ces applications sont appelées transformations de mouvement (Drouhard 1992, Drouhard et Panizza 2012). Les transformations de mouvement s'insèrent dans l'analyse épistémographique (Drouhard 2013) qui considère que les savoirs relatifs aux objets mathématiques sont situés dans un espace essentiellement à trois dimensions :

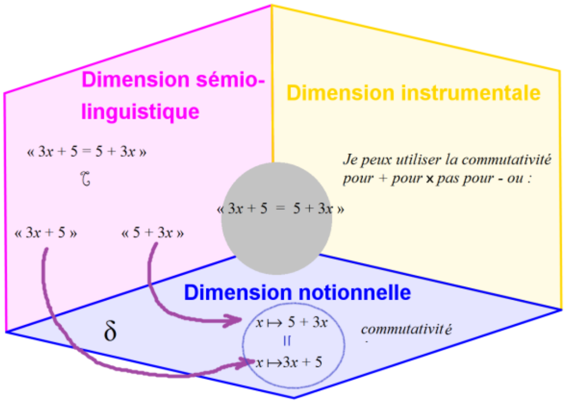


Figure 1 – Schéma simplifié de la projection des savoirs relatifs à un objet dans le cadre de l'analyse épistémographique

Cette modélisation permet à la fois de mettre l'accent sur l'action et sur une interprétation de l'égalité en termes de production de manipulation d'ostensifs dans la dimension sémio-linguistique et ce en lien avec la dimension notionnelle regroupant des savoirs relatifs aux définitions et propriétés des objets observés. Les transformations de mouvement permettent dès lors de se saisir d'un savoir complémentaire permettant de multiples interprétations (dans le sens de *flexibility of thinking*, Sfard & Linchevski, 1994) des écritures d'égalités. Elles doivent pouvoir être considérées à la fois comme égalités d'expressions algébriques, comme équivalence de programmes de calcul (Bosch & Chevallard, 2012, Drouhard, 1995) E_1et E_2, mais aussi comme résultante d'une transformation de mouvement. Autrement dit, l'expression $E_2(x)$ doit pouvoir être interprétée comme image de l'expression $E_1(x)$ par une transformation de mouvement ou d'une composition de transformations de mouvement. Elles portent une modification profonde de l'égalité au moment de la construction du calcul algébrique, d'autant qu'il n'y a pas de véritable précurseur d'une telle interprétation à l'école primaire sur les écritures arithmétiques.

Par ailleurs, la notion de transformation de mouvement permet de s'attaquer à la question du discours. Drouhard (1992) montre qu'il est possible de décrire les transformations de mouvement à partir des fonctions syntaxiques qui déterminent les invariants permettant d'identifier les sous-expressions à transformer, indépendamment des différences de forme entre expressions. Le fait que le discours puisse s'affranchir des catégories amène à supposer qu'il puisse résister, autrement dit à être de nature à soutenir les adaptations à différentes catégories comme des monômes, des sommes, ou à différentes écritures de nombres (en lien avec les fractions ou les racines par exemple). Celles-ci renvoient aux domaines d'application de plus en plus vastes en particulier pour la distributivité. Ceci m'amène au deuxième type de savoirs apparentés aux caractères FUG de la distributivité afin d'approcher des enjeux de co-construction et d'évolution de la notion dans une certaine dialectique entre numérique et algébrique, entre systèmes de nombres et théorie du calcul algébrique.

Une notion revêt, à un moment donné du curriculum, un caractère formalisateur si elle offre un formalisme nouveau de connaissances anciennes. Elle présente un caractère unificateur si elle unifie des connaissances anciennes traitées de manière isolée jusque là, et enfin un aspect généralisateur si elle apporte une extension de l'ancien. Des analyses globales de programmes et de manuels du primaire et du collège conduites dans la thèse montrent que la distributivité, lorsqu'elle devient objet d'enseignement en 5^{e}, unifie des pratiques anciennes de calcul mental et de calcul posé de produits tel qu'il est enseigné usuellement. La distributivité porte un formalisme nouveau, algébrique, et orchestre un double mouvement de généralisation. Elle s'étend par préconstruction des nombres entiers aux nombres décimaux, puis dans un second mouvement, l'extension est posée comme postulat pour la construction de la règle de multiplication sur les nombres relatifs en 4^{e}, avant d'être de nouveau étendue d'une certaine manière à l'ensemble des nombres réels avec l'apparition des racines carrées en 3^{e}. De façon concomitante, on observe une extension de son usage au-delà des nombres, à des expressions algébriques apparentées à des polynômes. Le schéma suivant récapitule ces aspects :

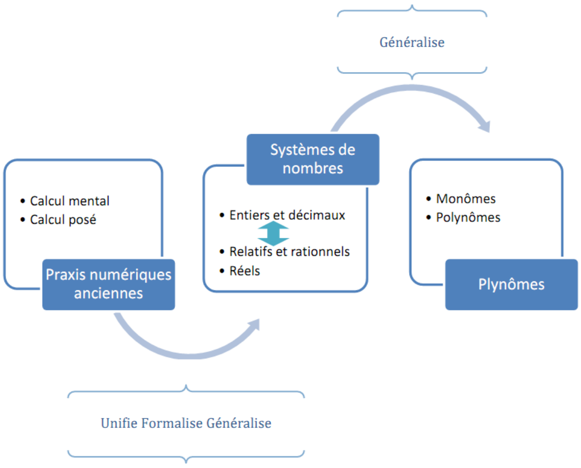


Figure 2 – Schéma des aspects FUG de la propriété de distributivité

Afin de pister dans quelle mesure et comment les savoirs envisagés peuvent être enseignés et appris, la méthodologie de la thèse a suivi trois voies. La première consiste à explorer les savoirs à enseigner et enseignés en appui sur des analyses de manuels de programmes, et de discours d'enseignants afin d'éclairer les projets d'enseignement possibles autour de ces savoirs (et non d'analyser leurs pratiques). La seconde correspond à l'élaboration et l'expérimentation d'une ingénierie didactique fondée par les caractères FUG de la distributivité et la notion de transformation de mouvement. La troisième relève d'une analyse épistémographique d'un savoir enseigné existant en acte autour d'une certaine extension de l'utilisation de la distributivité du côté des polynômes : la substitution.

Ces trois voies correspondent à chacune des parties suivantes de ce texte.

UNE TRANSPOSITION POSSIBLE DES SAVOIRS A ENSEIGNER SUR LA

DISTRIBUTIVITE

Dans le cadre de ce texte, nous n'exposerons que quelques résultats des analyses conduites. Pour cela nous nous centrerons sur la première partie du schéma précédent et en particulier sur l'unification de praxis numériques anciennes associés au calcul mental et posé de produits.

Tout d'abord les analyses de manuels et de programmes du primaire attestent de l'utilisation en acte de la distributivité pour calculer des produits comme 14×12 mentalement. L'une des techniques possibles consiste à calculer 14×10 + 14×2. De même, pour le calcul posé de multiplication, les manuels de CM_2 donnent à voir les produits partiels qui sous-tendent la technique à l'instar de l'exemple suivant :

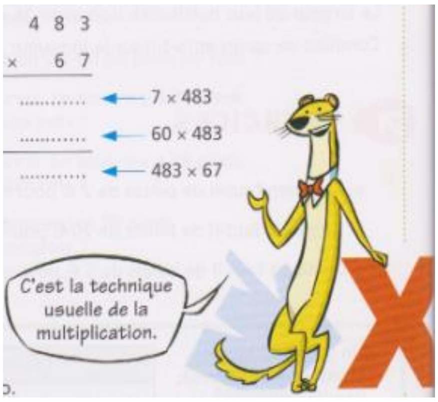


Figure 3 – Euro Maths CM_2 (2009) p. 24

Toutefois, les résultats des analyses de manuels de 6e montrent l'absence de traces de ces produits partiels au profit d'éléments liés à la numération décimale de position, en utilisant parfois même des ostensifs comme les points à la place des zéros qui tendent à masquer davantage l'utilisation implicite de la distributivité :

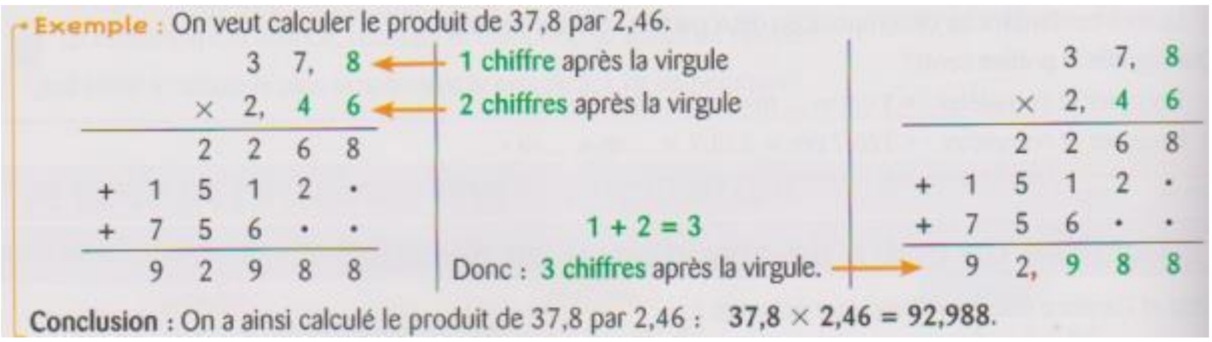


Figure 4 – Phare 6e (2014) p. 62

D'autre part, l'analyse plus détaillée des techniques de calcul mental montre combien la distributivité peut n'être que l'un des éléments technologiques parmi bien d'autres. Ainsi pour calculer 48×250, un document ressources décrit-il une technique possible formalisée pour les enseignants de la manière suivante :

48 × 250 = 48 × 200 + 48 × 50 = 48 × 2 × 100 + 48 × 100 ÷ 2 = 96 × 100 + 4 800 ÷ 2
48 × 250 = 9 600 + 2 400 = 12 000
Etc.

Figure 5 – Le nombre au cycle 3, apprentissages numériques p.38La distributivité n'est à l'œuvre que pour la première étape de la technique, tandis que d'autres éléments technologiques apparaissent à la suite, liés à l'associativité ou à des connaissances de nombres.

Plus généralement, les analyses conduites montrent que la distributivité peut se révéler évanescente au regard d'autres éléments technologiques liés notamment à la numération décimale de position. Ceux-ci peuvent de plus faire obstacle à l'identification de son usage implicite. En effet, pour donner accès à une description de technique fondée sur la distributivité, celle-ci doit pouvoir se faire à partir de nombres et non à partir de chiffres. Les manuels de primaire témoignent également de la prégnance de l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, vis-à-vis de la soustraction, et ce dans le sens du développement. Cet usage peut de plus être « oublié » en 6^{e}, les résultats des analyses conduites témoignent d'occasions d'utilisation variable pour le calcul mental selon les manuels, de sorte que l'on puisse faire l'hypothèse qu'il en va de même dans les classes. Il n'en demeure pas moins que la distributivité constitue l'arrière plan technologique de praxis numériques anciennes de calcul mental comme de calcul posé.

Toutefois aucun des cinq manuels de 5^{e} analysés ne propose de retour sur la technique opératoire de la multiplication posée, que ce soit au moment de l'introduction de la notion ou dans les exercices. La prise en compte du calcul mental quant à elle pose question au regard des praxis numériques anciennes. Les manuels Triangle et Phare n'en proposent en effet qu'à l'occasion d'applications de la technologie de la distributivité établie au préalable sous sa forme symbolique algébrique. Pour le premier, le calcul mental de produits n'apparaît que dans la partie exercices et n'en représente que 2% (2/121). Pour le second, si le calcul mental apparaît dans la partie Activité, les spécimens, lorsqu'ils ne relèvent pas d'une différence de deux produits donc d'un calcul reposant sur la factorisation qui ne correspond pas aux praxis anciennes, sont accompagnés d'une aide sous la forme $k = 7{,}3$; $a = 3{,}259$ et $b = 1{,}259$ qui ne laisse aucun doute quant au statut de la tâche : il ne s'agit pas véritablement de compléter les praxéologies de calcul anciennes, mais bien d'utiliser le formalisme algébrique. Ceci est corroboré dans la partie Cours par des exemples sur d'utilisation de la distributivité sur des expressions numériques, sans poursuivre le calcul, c'est-à-dire sans même de résultat.

D'autres manuels montrent cependant une certaine prise en compte des praxis anciennes de calcul mental de produits en utilisant implicitement la distributivité au moment de son introduction. Cependant, l'analyse des spécimens afférents révèle la prégnance d'un facteur égal à 1 dans les produits partiels. Ainsi les produits donnés à effectués sont par exemple des produits par 11, par 21, par 1001, ou par 19, c'est-à-dire par des nombres dont les décompositions sous forme de somme ou de différence conduisent à des écritures du type $a \pm 1$ où a est le produit d'un entier non nul par une puissance de 10 différente de 1. Ce choix ne semble pas véritablement propice à l'émergence de la distributivité, d'autant que, comme en attestent les analyses de manuels de CM$_2$ que nous avons conduites, les pratiques du primaire afférentes correspondent plutôt à l'utilisation de l'addition itérée et de la définition de la multiplication sur les entiers. Effectuer 54×11 en utilisant 54×10 + 54×1 demande de penser et d'effectuer un produit par 1 supplémentaire par rapport à la technique reposant sur 54×10 + 54.

De plus les analyses des choix des spécimens montrent que ces facteurs égaux à 1 sont majoritaires dans les parties activités comme dans les parties exercices :

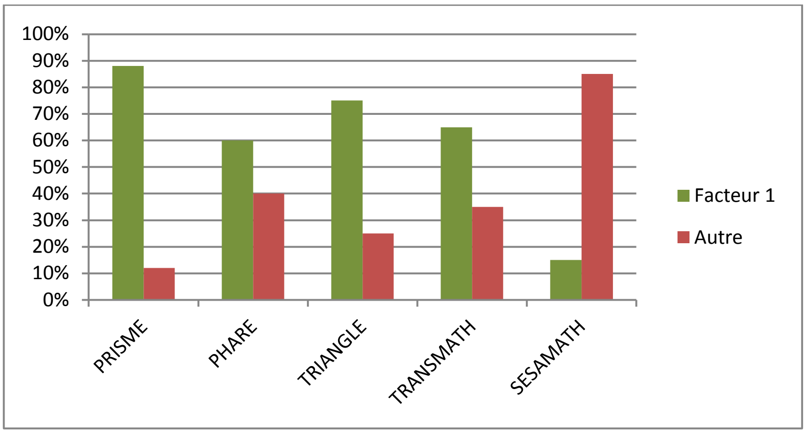


Figure 6 – Comparaison relative des places des spécimens de calcul de produits engageant avec la distributivité un facteur égal à 1 dans les produits partiels

Notons que le manuel Sésamath, faisant exception dans la partie Exercices, met pourtant très majoritairement en avant dans la partie Activité ces facteurs égaux à 1. De plus, une analyse fine des tâches proposées dans cette partie (Constantin, 2014) montre que l'unification n'est pas un enjeu d'étude.

Plus généralement, l'étude que nous avons conduite montre que la distributivité présente des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur en l'état peu pris en compte par les manuels ou de façon incomplète. L'unification véhiculée par les agrégations potentielles des praxéologies anciennes et nouvelles, complétées à la fois du point de vue technologique et théorique, semble, comme nous venons de le voir avec l'absence du calcul posé ou la prégnance de facteurs égaux à 1, un enjeu ignoré ou faiblement exploré dans l'existant. Le même constat s'érige à propos de l'unification entre les praxéologies liées au développement et à la factorisation que devrait unifier la distributivité : elles apparaissent cloisonnées par les manuels, et nos analyses concordent avec d'autres recherches (Croset, 2009 ou Assude, Coppé & Pressiat, 2012). Les extensions aux différents types de nombres (entiers, décimaux, rationnels, et certains réels avec les racines carrées) sont dans l'ensemble incomplètes, avec des enjeux de généralisation dans les constructions de systèmes de nombres absents ou peu mis en avant. Celles-ci vont de pair avec une faible exploration des formalismes, de leur articulation, et de leurs usages au fur et à mesure des extensions à des ensembles de nombres de plus en plus vastes tout au long du collège. Elles s'accompagnent même de généralisations silencieuses du côté des polynômes qui s'opèrent au travers de substitutions muettes y compris en début d'apprentissage.

En cela la construction curriculaire que nous envisageons au travers des caractères FUG est une alternative.

Etant donné que nous considérons la distributivité comme un savoir nouveau particulier, nous avons été amenée à envisager une ingénierie dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) en appui sur la notion de milieu destiné à favoriser l'émergence de la distributivité enfouie dans les connaissances anciennes. Le formalisme nouveau amène de plus à envisager de penser un passage de l'interprétation de l'égalité en termes d'annonce de résultat à relation d'équivalence et résultante de transformation de mouvement.

UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR INTRODUIRE LA DISTRIBUTIVITE

L’ingénierie élaborée et expérimentée en 5[e] se compose essentiellement de quatre situations.

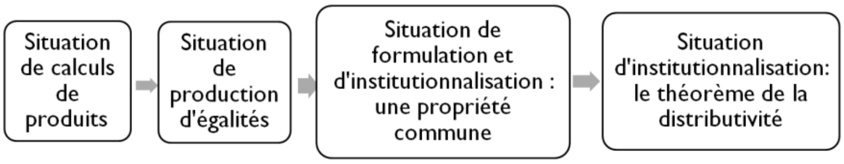


Figure 7 – Schéma récapitulatif de l’ingénierie

La première situation consiste pour les élèves à effectuer un certain nombre de produits d’entiers mentalement comme 12×203 ou 35×98 destinés *a priori* à favoriser l’utilisation en acte de la distributivité, même si d’autres techniques peuvent émerger sans que cela gêne la suite du travail. Les techniques sont explicitées à l’oral puis des multiplications sont données à poser, et l’utilisation de la calculatrice est autorisée pour contrôler les produits intermédiaires comme le résultat. Ces calculs et ces descriptions vont alors servir de milieu pour la situation suivante. Celle-ci demande d’écrire des égalités en appui sur ces descriptions. Les écritures visées étant par exemple $12\times(200 + 3) = 12\times200 + 12\times3$. A partir d’un certain nombre d’égalités produites lors de cette situation, la situation de formulation consiste alors à identifier « une chose commune » pour faire émerger la propriété de distributivité avant de l’institutionnaliser sous forme rhétorique et symbolique. Nous allons étayer cette description rapide pour présenter quelques-uns des principaux résultats de l’expérimentation menée.

Analyses *a priori* : rôle des variables didactiques

Le choix des variables didactiques de la situation de calculs doit *a priori* conduire à l’élaboration d’un milieu riche permettant de favoriser la formalisation, l’unification et la généralisation tout au long des situations suivantes.

Par exemple, la variable *nombre de chiffres des facteurs* peut prendre les valeurs de 1 à 4. Lorsque l’un des facteurs ne comporte qu’un chiffre, l’autre est nécessairement celui qui sera décomposé en somme, de sorte qu’à condition que les élèves n’échangent pas les écritures des facteurs dans les produits comme 7×32 ou 46×3, nous supposons que puissent apparaître des écritures relevant de distributivité à gauche ou à droite. En outre, lorsque le nombre de chiffres des facteurs et de 3 ou 4, des sommes de trois ou quatre termes peuvent alors émerger.

La variable *compléments à 100 ou à 200 de l’un des facteurs* permet aussi d’envisager que la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction soit favorisée pour calculer par exemple 35×98 et par suite que des écritures produites lors de la situation suivante en relèvent.

Cette diversité des formalismes intermédiaires associés lors de la situation de production d’égalités est essentielle pour la suite des situations envisagées. Elle permet de prendre en compte différentes formes possible de la connaissance ancienne pour préparer les caractères FUG, mais aussi l’émergence d’une transformation de mouvement véhiculée par des descriptions qui doivent pouvoir s’effectuer à partir de fonctions syntaxiques et non de lectures brutes d’ostensifs. La flexibilité des écritures envisagée est également essentielle pour fonder une généralisation portant ces différentes instanciations possibles et en même temps un certain domaine d’application. Le rôle de la mémoire didactique est de ce point de vue *a priori* déterminant.

Analyses *a priori* : rôle de la mémoire didactique

Nous supposons que l'enchaînement des situations envisagé soit susceptible de favoriser de multiples interprétations des écritures ainsi que la construction d'une transformation de mouvement.

Lors de la situation de production d'égalités en effet, la consigne impose un formalisme nouveau pour décrire les techniques puisqu'il s'agit d'« écrire des égalités montrant les procédés de calcul ». Elle explicite de plus une rupture de contrat (Brousseau 1998) : « l'égalité ne doit pas montrer de résultat ». Elle engage de fait une extension de l'usage du signe =. Les analyses des praxéologies en jeu montrent toutefois qu'il est peu probable que les écritures visées émergent d'elles même et le scénario prévoit qu'une élaboration collective soit nécessaire pour produire une écriture comme $134\times(20 + 2) = 134\times20 + 134\times2$ à partir d'une écriture envisagée comme $134\times22 = 134\times20 + 134\times2$. De sorte que l'analogie scripturale qui puisse être à l'œuvre par la suite pose question, et puisse être de nature à empêcher la diversité des formalismes envisagée. En outre, dans cette situation, les tâches de vérifications envisagées sont *a priori* destinées à compléter une interprétation des expressions comme programme de calcul et en particulier pour les sommes comme (20+2) qui émergent comme écriture de nombre.

Lors de la situation de formulation et d'institutionnalisation, la mémoire des situations de calcul et de production d'égalités amène à penser que les descriptions d'une chose commune qui émergent dans la classe puissent se faire en appui sur des programmes de calcul, et sur des manipulations des écritures, afin d'aboutir à une première formulation rhétorique. La consigne suivante s'attachant à écrire des égalités en appui sur ce premier discours engage de plus à faire évoluer les praxéologies afférentes pour inclure cet embryon technologique et amorcer l'utilisation d'une transformation de mouvement. De sorte qu'il est possible que cette nouvelle confrontation se révèle être un levier pour compléter les discours du côté de manipulations ostensives.

Cependant, lors de la dernière situation d'institutionnalisation, le théorème ne s'est pas constitué comme technologie des praxéologies de calcul. Une fois prouvé sur les entiers et explicité sous des formalismes à la fois rhétoriques et algébriques, c'est une nouvelle confrontation aux types de tâches consistant à écrire des égalités ou à calculer des produits qui permettra *a priori* de réorganiser les praxéologies. Les analyses *a posteriori* s'attacheront donc à pister le rôle technologique du théorème ainsi élaboré lors de ces épisodes.

Analyse *a posteriori* de la situation de production d'égalités

Les résultats des analyses *a posteriori* de la situation de production d'égalités montrent tout d'abord que la dévolution a bien lieu. Les élèves s'emparent véritablement de la rupture de contrat, qui se révèle au cœur des débats au sein des groupes comme en témoigne l'extrait suivant :

Flo : on écrit 43 fois 2

Gre : est égal à 86 […]

Flo : mais faut pas marquer les résultats, tu mets 43 fois 2 … plus

Gre : pourquoi tu mets plus

Séb : faut marquer le résultat

Flo : mais non

Gre : mais si

Ainsi que l'analyse *a priori* le prévoyait, les premières écritures produites ne sont pas de la forme attendue, et c'est l'intervention du professeur qui permettra d'aboutir. Toutefois l'expérimentation menée montre que l'analogie scripturale n'aura par la suite que peu d'effet.

Les écritures produites sont d'une grande diversité, en lien avec les choix des valeurs des variables didactiques :

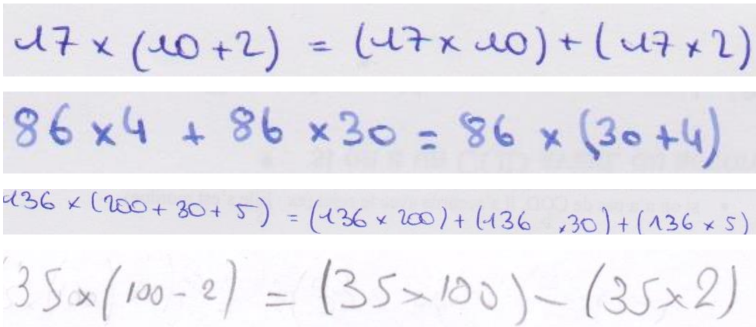


Figure 8 – Exemples d'égalités produites par les groupes

La souplesse des écritures qui s'y créent de façon assez remarquable s'explique par le choix des variables didactiques portant sur les produits donnés à effectuer aux élèves dans la première situation, et qui a été généré par les enjeux d'unification et de généralisation visés. Les égalités produites montrent à la fois le sens du développement comme de la factorisation, des distributivités à gauche ou à droite, des décompositions de facteurs sous la forme de sommes de deux, trois ou quatre termes. Les localisations géographiques des termes et des facteurs sont variables entre les membres de gauche et de droite d'une même égalité. Or, nous avons vu que ceci était une condition nécessaire pour l'émergence de reconnaissance des fonctions syntaxiques en amont de descriptions de transformations de mouvement susceptibles de favoriser des adaptations futures. Nous allons voir comment.

Analyse *a posteriori* de la situation de formulation

La mémoire des situations précédentes, par l'intervention d'une élève va ainsi faire basculer les premières reconnaissances ostensives brutes (les signes +, les parenthèses) comme « chose commune », vers l'identification d'une technique de manipulation ostensive productrice de l'égalité. La construction d'un discours demande du temps, des reprises, des décontextualisations et recontextualisations dont le rôle n'est pas négligeable : elles permettent de s'entendre sur ce dont on parle avant d'en trouver une manière générale de le désigner. De ce point de vue, la souplesse des écritures permet bien de chercher à se saisir des fonctions syntaxiques :

Elv : A chaque fois ça reprend le même chiffre […]

Dav : Oui puisque celle d'après c'est 62 qui est heu, c'est 62 qu'on reprend deux fois, après y'a le 86, le 68 et …

Art : Ah ouais

P : Alors qu'est-ce que c'est ? ce… On reprend deux fois oui ?

Dav : le facteur

P : […] On reprend deux fois le facteur ? Mar ?

Mar : ben qui est pas additionné

La mémoire des situations précédentes joue à nouveau un rôle déterminant : elle permet une double interprétation des écritures. Ainsi, Mar parle-t-elle de façon saisissante de « facteur qui est pas additionné ». Le premier milieu des calculs sert de référence forte en permettant d'éviter la difficulté de reconnaissance d'un produit. La seconde situation permet de façon essentielle d'interpréter la somme comme un facteur et comme une écriture de nombre, tout en préparant les formulations rhétoriques visées du théorème de la distributivité. Nous ne présenterons que succinctement ici quelques éléments à l'issue de l'élaboration du théorème afin de déterminer s'il se constitue comme composante technologique aux praxéologies de calcul et d'écriture d'égalités.

Analyse *a posteriori* de la situation d'institutionnalisation

L'épisode suivant rend compte d'un épisode à l'occasion de la correction du calcul du produit 34×102 :

P : on reprend le premier ? Donc Mau a écrit 34 multiplié par 100 plus 34 multiplié par 2 … est-ce que c'est bien égal à ce qui est écrit là à gauche ?

Classe : oui

P : pourquoi ?

Mat : parce que c'est la même chose qu'a fait Chr et c'est le théorème, enfin en fait elle a décortiqué le nombre elle a fait 100 plus 2

On y observe des descriptions de techniques mais pas de technologie spontanément, le professeur insiste, en demandant pourquoi. Dès lors, Mat le justifie par l'évocation du théorème, qui prend donc bien la place d'élément technologique dans la praxéologie. Mat évoque aussi le premier membre des égalités produites correspondant à la manipulation des écritures : « elle a décortiqué le nombre » dit-elle. P pousse alors les descriptions, et demande de recontextualiser, Mat s'exécute, non sans difficulté, mais parvient à décrire les programmes de calcul, même si le premier omet l'un des facteurs qui est 34 :

P : elle a fait 100 plus 2 et après ?

Dav : de l'autre côté

Mat : 100 et 2 ça fait 102 donc heu 34 fois 100 elle a trouvé le résultat après elle l'a ajouté à 34 fois 2 pour faire 100 plus 2 et elle a trouvé le résultat

Ce qui manque cependant dans cette description est l'idée d'équivalence, de sorte que le professeur relance :

P : oui mais qu'est-ce qui vous assure que là, ça ce calcul là il est bien égal à celui là ? Clo ?

Clo : c'est le théorème qui le dit

Le théorème est bien élément technologique assurant l'égalité, ou plus exactement équivalence des programmes de calcul. Les échanges qui se poursuivent sont nombreux et parfois difficiles, mais leurs analyses montrent que s'y construisent bel et bien des articulations entre dimension mathématique et sémio-linguistique avec des allers-retours entre formulations générales et instanciées. Ainsi l'expression 100 + 2 est-elle ici interprétée comme écriture de nombre (« elle a décortiqué 102 »), comme programme de calcul (« 100 et 2 ça fait 102 ») ou comme somme de termes correspondant au théorème.

Plus généralement, les analyses des discours qui apparaissent dans la classe montrent que les élèves se saisissent du théorème et des formulations qui servent doublement. Elles permettent de justifier l'équivalence implicitement employée relevant de la distributivité, qui assume son rôle technologique de ce point de vue à la fois dans les praxéologies de calcul et d'écriture d'égalités. Elles permettent de soutenir les manipulations dans les descriptions des gestes de transformation d'écriture, à la fois numériques et algébriques.

Des savoirs opérationnels à l'issue de l'ingénierie

Plus généralement, les résultats des analyses *a priori* et *a posteriori* montrent que les situations envisagées permettent de construire divers formalismes associés à la propriété de distributivité, à la fois rhétoriques et algébriques. Les interprétations associées articulent les dimensions sémio-linguistique (transformation de mouvement) et mathématique ou notionnelle (programme de calcul) et l'expérimentation menée montre que les élèves parviennent à se saisir des discours afférents. Les difficultés langagières sont importantes, et les interventions didactiques du professeur prévisibles apparaissent avec toutes leurs maladresses. Pourtant, la mémoire des milieux successivement construits joue un rôle déterminant pour permettre des interprétations multiples des égalités et une évolution des discours en construction. Ces discours prennent du temps, nécessitent de nombreuses reprises faites de décontextualisations et recontextualisations, mais ils n'en s'élaborent pas moins en se nourrissant des interventions des uns et des autres. C'est là l'un des résultats saillants de l'expérimentation : celui de l'émergence de dialectiques fines entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique véhiculées par les transformations de mouvement et qui accompagnent les réorganisations praxéologiques conduisant à ce que la distributivité occupe une place dans la composante technologique tout en s'articulant avec un travail sur et avec les ostensifs. Les interprétations des expressions réfèrent à la fois à des écritures de nombres, à des programmes de calcul et à des transformations de mouvement.

Un autre résultat réside dans la construction de formalismes rhétoriques qui, tout comme le jeu construit sur les variables didactiques à l'origine, permettent que subsistent une certaine souplesse des écritures tout au long des situations. Ceci conduit à penser que les manipulations ostensives qui s'exercent se fondent sur les fonctions syntaxiques. Cette flexibilité persiste en partie[1] au moment de l'évaluation, avec des contrôles qui semblent s'exercer pour la commutativité selon les opérations à l'instar de l'extrait suivant :

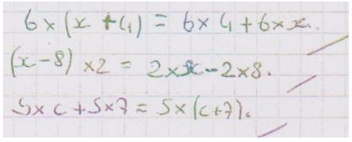


Figure 9 – Extrait d'une copie

Les unifications entre factorisation et développement et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction auront alors été à l'étude.

L'ingénierie que nous avons élaborée et expérimentée est en réalité une première étape d'un projet global de construction d'une alternative pour l'enseignement du calcul algébrique au collège à partir d'enjeux formalisateur unificateur et généralisateur. Les analyses de manuels tout au long de la scolarité obligatoire et dont nous n'avons donné que quelques résultats ici montrent qu'une organisation des savoirs à enseigner autour du calcul algébrique est possible de ce point de vue, voire même en arrière plan des programmes, et en même temps qu'elle ne vit pas réellement en l'état dans l'enseignement. De multiples incomplétudes peuvent faire obstacle du côté des praxis anciennes de calcul au primaire. Les enjeux de co-constructions des systèmes de nombres et d'extension de l'usage de la distributivité s'avèrent implicites, ou peu explorés. Ils se déploient pourtant tout au long du collège, des nombres entiers ou décimaux aux nombres relatifs, ainsi qu'aux « racines carrées » de nombres positifs. Notre étude met également à jour des extensions du côté des polynômes dans l'utilisation de la distributivité qui s'exercent silencieusement dans l'institution, et qui s'accompagnent de substitutions muettes ou présentées comme allant de soi dans les manuels. Elles concernent des monômes par exemple lorsqu'il s'agit de développer $4(5x + 2)$ ou des sommes lorsqu'il s'agit de factoriser $(3x + 8)(7x - 4) + 2(3x + 8)$. Elles peuvent être précoces dans le cas des monômes. Elles interrogent dès lors la transparence du lien de la construction de la distributivité en appui sur les systèmes de nombres, son ou ses formalismes algébriques et leurs usages. Peut-on dès lors considérer la substitution comme un nouveau savoir opérationnel pour outiller la pratique du calcul algébrique ?

LA SUBSTITUTION, UNE NOTION FUG COMPLEMENTAIRE VOIRE INCONTOURNABLE ?

Nous cherchons d'une part à déterminer dans quelle mesure la substitution existe-t-elle dans les savoirs enseignés ou à enseigner tout au long du collège comme savoir opérationnel. Nous présentons pour cela quelques résultats des analyses de manuels et de discours enseignants de la thèse, afin de pister à la fois des conditions, des contraintes mais aussi des difficultés potentielles. Nous cherchons d'autre part à déterminer dans quelle mesure doit-elle ou peut-elle être un objet d'enseignement. La réflexion épistémologique conduite dans notre recherche s'est faite en articulant des éléments liés à l'émergence historique de la notion en appui sur les travaux de Serfati (2005) et un point de vue épistémographique pour envisager à la fois des potentialités et des limites pour un tel enseignement.

Les résultats des analyses de manuels montrent une généralisation de l'utilisation des formalismes algébriques de la distributivité qui apparaît lorsqu'il s'agit par exemple de

[1] La majorité des élèves ont très normalement standardisé leurs écritures, cependant les extraits de cahiers et du contrôle qui a lieu près d'un mois après montrent qu'un quart des élèves utilisent des écritures souples.

développer $3x(x + 5)$ en appui sur l'égalité $k(a + b) = ka + kb$. Ce faisant, ce produit de trois facteurs est interprété comme produit de deux facteurs, sans que le choix opéré, dicté par l'efficacité de la technique, ne soit mis à jour. Plus encore, un monôme comme $3x$ peut être interprété soit comme Produit, soit comme Pseudo-Monôme selon que l'on développe ou que l'on factorise. La transparence de l'adaptation réalisée pose également question au regard des altérations des catégories initialement utilisées pour la construction : les manuels indiquent que k, a, et b désignent des nombres, l'interprétation de $3x$ comme une écriture de nombre est-elle évidente pour les élèves ?

Quoi qu'il en soit, les observations de substitutions implicites se révèlent muettes et précoces. Elles peuvent apparaître dès les débuts d'apprentissages en 5e, puis en 4e et concernent à la fois les catégories Pseudo-Monômes et Sommes. La substitution apparaît plus présente en 3e pour outiller les factorisations, mais non les développements (ou de façon marginale), elle peut être alors posée, mais ne fait pas l'objet d'un discours. De sorte que les généralisations qui s'exercent silencieusement et les unifications qu'elles véhiculent ne semblent guère mises à l'étude. Pourtant, la substitution pourrait donner accès à des complexifications ostensives possibles, y compris en début d'apprentissage où l'expérience des formes fait défaut, et ce au regard de deux enjeux.

Elle pourrait d'une part outiller des adaptations de techniques en lien avec l'usage du ou des formalismes algébriques. Par exemple $k \curvearrowright (3x), a \curvearrowright x, b \curvearrowright 5$ dans la forme « $k(a + b) = ka + kb$ » donne $(3x)x + (3x)5$. Elle pourrait même nourrir de nouvelles adaptations permettant de développer le carré d'une somme de trois termes.

Elle pourrait d'autre part permettre de créer de nouvelles identités comme

$$k\big(a + (b + c)\big) \underbrace{=}_{b \curvearrowright (b+c)} ka + k(b + c) \underbrace{=}_{\mathcal{T}} ka + kb + kc.$$

La substitution peut toutefois rigidifier la pratique, les transformations de mouvement paraissent donc complémentaires.

Toutefois de nombreuses questions demeurent, comme celle des ostensifs à utiliser pour poser une substitution. Emploie-t-on une flèche à l'instar des écritures précédentes, ou un signe = dont on étendrait encore l'usage ?

Emploie-t-on des parenthèses pour écrire les substituantes ? L'extension peut être intéressante pour désigner un résultat constitué, mais jusqu'où parenthéser ?

Les assemblages dûment complétés permettent un travail aveugle dans le registre combinatoire, mais dans quelle mesure outillent-ils ou au contraire gênent-ils les interprétations ou les manipulations ?

La substitution pourrait ainsi s'avérer motrice pour articuler les différents formalismes des identités soutenant le calcul algébrique, de la distributivité sous sa forme simple, ou double et inversement. Elle pourrait soutenir explicitement des adaptations existantes, en particulier en début d'apprentissage où l'expérience des formes fait défaut, ou même permettre des adaptations nouvelles comme le développement d'un carré d'une somme de trois termes. Cependant nous ne l'envisageons que comme complémentaire aux transformations de mouvement, car son exercice dans la dimension sémio-linguistique peut rigidifier en partie les techniques. Elle s'avère avoir de l'avenir dans les types de tâches au lycée où elle peut apparaître posée pour le calcul intégral par exemple. Il reste toutefois une réflexion à conduire pour envisager ce qui peut ou doit être enseigné sur la substitution, à quel moment et sous quelles conditions, d'autant qu'en toute fin, la substitution experte se passe d'ostensifs. Quoi qu'il en soit, les transformations de mouvement comme la substitution sont envisagées pour le travail des formalismes, nécessaire dans toute pratique d'un langage symbolique. Elles permettent d'aborder un enseignement des articulations entre dimensions sémio-linguistique et mathématique à penser. Elles sont complémentaires aux autres voies explorées par la recherche autour de la modélisation, c'est-à-dire qu'elles paraissent pouvoir faire le lien entre ces praxéologies et celles du calcul algébrique, pour sa construction, même si le travail n'est qu'amorcé ici.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(2/3) 309-336.

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives.*

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1994) Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis*. 1993-1994, pp. 190-200

BROUSSEAU G. (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique* Grenoble : La Pensée Sauvage. Rééd. augmentée (1991).

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x* 19, pp. 43-72

CROSET M-C. (2009) Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte. *Thèse de doctorat*, Université de Grenoble.

CONSTANTIN C. (2008), Des fragilités du collégien aux difficultés du lycéen en mathématiques, deux études de cas : Yoan et Joanna, *Mémoire de Master 2 Recherche*, Université de Paris 7.

CONSTANTIN C. (2014) Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ? *Thèse de doctorat*, Aix-Marseille Université.

DROUHARD J.-P. (1992) Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire, *Thèse de l'université Paris 7.*

DROUARD J.-P. (1995) Algèbre, calcul symbolique et didactique, In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes de la 8ème Ecole d'2té de la Didactique des mathématiques* (pp. 325-344). Clermont-Ferrand : IREM.

DROUHARD J.-P. (2012) L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In M. Abboud-Blanchard & M. Flückiger (Eds.) Actes du Séminaire national de didactiques des mathématiques (Année 2011). IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot. Pp. 129-133.

DROUHARD J.-P., PANIZZA M. (2012) Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives.*

DROUHARD J.-P. (2013) El análisis epistemográfico : un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática. Comunicación en las XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, Cordoba. Area Lógico-Epistemológica de la Escuela de Filosofia y Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba.

MERCIER A. (2012) Vous avez dit algèbre ? *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives.*

ROBERT A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

ROBERT A. (2005) Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré. *Petit x*, 67, 63-76.

SERFATI M. (2005) *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Editions PETRA.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

TONNELLE J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

WOZNIAK F. (2012) Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 32(1)*

MANUELS SCOLAIRES

BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2009) *Mathématiques 6^e^* Collection PHARE, Editions Hachette

BRIAND J., NGONO B., PELITIER M.-L.., VERGNES D. (2009) *Euromaths CM2,* Editions Hatier.

MEN-CNDP (2012), *Calcul et conceptualisation* (Butlen et Masselot), Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, Collection « Ressources pour faire la classe ».

TITRE

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2015

(Séminaires de Paris des 13-14 Mars 2015 et des 6-7 novembre 2015)

AUTEURS

Anne-Cécile Mathé
Éric Mounier

RÉSUMÉ

Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Les sessions de mars et novembre se sont déroulées à Paris dans les locaux de l'université Paris Diderot, avec l'aide du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR-EA 4434, UPD, UPEC, UCP, U Rouen, U Artois) et de l'IREM de Paris Diderot.

MOTS CLÉS
Didactique des mathématiques

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Fabrice Vandebrouck – Reprographie Nadine Locufier
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2016 – ISBN : 978-2-86612-375-8